

DOTTORATO DI RICERCA in
SCIENZE MATEMATICHE
Ciclo XVIII

**Il calcolo numerico
dell'antitrasformata di Laplace
in presenza di dati discreti**

Rosanna Campagna

Tesi di Dottorato di Ricerca

Università degli Studi di Napoli Federico II

Novembre 2006

*Quelli che s'innamorano di pratica
senza scienza, son come 'l nocchiere,
ch'entra in navilio senza timone o bussola,
che mai ha certezza dove si vada.*

Leonardo Da Vinci

*...e'l naufragar m'è dolce
in questo mare*

Giacomo Leopardi

Ringraziamenti

Desidero ringraziare con sincerità due figure professionali che stimo ed ammiro, e che come fari, in questi anni, hanno illuminato e guidato le mie esperienze ed il mio lavoro.

Ringrazio il Prof. Almerico Murli, mio Tutor Scientifico, che ha saputo cogliere e far crescere la mia passione. Grazie perché, attraverso gli insegnamenti, gli stimoli ed i consigli, è stato una fonte ricca da cui attingere competenze che hanno contribuito alla mia crescita professionale ed umana.

Ringrazio la *mia* Prof.ssa Luisa D'Amore che, *quale moderno Re Mida*, è riuscita a tingere di un tocco d'oro il mio lavoro e le mie esperienze; grazie per la disponibilità all'ascolto, per i consigli, per gli ammonimenti e gli incoraggiamenti.

Grazie ad entrambi per la stima che mi hanno sempre dimostrato e per la fiducia che sento hanno riposto in me.

Rosanna

Dedica

Quando si porta a termine un'avventura è doveroso, oltre che sentito, fermarsi a riflettere su quanto e *quanti*, in qualche modo, ne hanno preso parte. Dedico questo lavoro, e tutto ciò che ha accompagnato questi quattro anni di Dottorato rendendoli indimenticabili, sia per la crescita professionale acquisita che per le esperienze umane vissute, a chi ha sostenuto le mie scelte e mi ha spronata ed incoraggiata a seguirle, portandole avanti sempre, senza arrendermi, anche nei momenti più duri; lo dedico a coloro che sanno che la mia passione è grande ed intendo seguirla, certa del sostegno che troverò in loro.

Grazie a Vincenzo, perché senza il suo amore e la sua stima probabilmente non avrei *osato tanto*.

Grazie alla mia famiglia, che come sempre ha condiviso con me le mie piccole soddisfazioni con orgoglio e mi ha creato l'*habitat* giusto per realizzarle.

Grazie alle persone che mi sono state *più vicine*, che in qualche modo hanno "sopportato", forse più di tutti, le mie ansie, la mia adrenalina, la mia caparbia.

Rosanna

Indice

1	Prefazione	1
1.1	Il calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace	1
1.2	Il contesto scientifico	2
1.3	Obiettivo della tesi	3
1.4	Contributi	4
1.5	Sviluppo e fasi della ricerca	5
1.6	Articolazione della tesi	7
2	Formulazione del modello	9
2.1	Introduzione	9
2.2	Prerequisiti	13
2.3	Formulazione del modello nel caso reale	21
2.3.1	Definizione della spline generalizzata	26
2.4	Costruzione della spline generalizzata: calcolo dei coefficienti	40
2.4.1	Formulazione del metodo costruttivo	41
2.5	Formulazione del modello nel caso complesso	64
2.5.1	Definizione della spline generalizzata	71
3	Esperimenti numerici: caso reale	75
3.1	Introduzione	75
3.2	Test nel caso reale	81
3.2.1	Dettagli implementativi	81
3.2.2	$F(s) = 1/s(s - 1)$	83
3.2.3	Accuratezza dei risultati	96
3.2.4	$F(s) = \log((s^2 + 1)/s^2)$	97
3.2.5	Accuratezza dei risultati	104
3.2.6	$F(s) = \text{atan}(1/s)$	105

3.2.7	Accuratezza dei risultati	112
4	Esperimenti numerici: caso complesso	113
4.1	Introduzione	113
4.1.1	Dettagli implementativi	115
4.1.2	$F(s) = 1/s(s - 1)$	117
4.1.3	Accuratezza dei risultati	133
4.1.4	$F(s) = 1/\sqrt{s + 2}$	138
4.1.5	Accuratezza dei risultati	153
4.1.6	$F(s) = \text{atan}(1/s)$	157
4.1.7	Accuratezza dei risultati	173
5	Esperimenti numerici: test di inversione	177
5.1	Introduzione	177
5.2	Applicazione di un metodo di inversione	178
5.2.1	Calcolo dell'antitrasformata di $F(s) = s/(s^2 + 1)^2$. .	178
5.2.2	Calcolo dell'antitrasformata di $F(s) = 1/(1 + 0.5s)^3$.	184
5.2.3	Calcolo dell'antitrasformata di $F(s) = \text{atan}(1/s)$. . .	187
6	Sul problema dell'inversione con dati discreti	190
6.1	Un esempio di applicazione: analisi di dati derivanti da spettroscopia NMR	190
6.2	Test di inversione con dati discreti	193
7	Conclusioni e sviluppi futuri	198
7.1	Considerazioni sui risultati raggiunti e prospettive future . . .	198
7.2	Alcuni problemi irrisolti e spunti risolutivi	198
A	Sull'interpolazione bidimensionale	200
A.1	Spline prodotto tensoriale	200
A.2	Sulla rappresentazione globale	201
A.2.1	<i>Blending surfaces</i>	201
A.2.2	Patches di Coons	202
B	Approfondimenti sulle spline biarmoniche	203
	Bibliografia	210

Capitolo 1

Prefazione

1.1 Il calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace

Il problema del **calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace** è noto a matematici, fisici ed ingegneri e la letteratura relativa alla sua risoluzione è notevolmente ampia. La quasi totalità dei lavori assume, però, che sia nota l'espressione analitica della Trasformata di Laplace da invertire. Non altrettanto ampia è, invece, la letteratura relativa al calcolo dell'antitrasformata, noto un insieme *preassegnato* di valori della sua trasformata. Tuttavia, esso risulta particolarmente interessante in svariati campi; non mancano, infatti, nel campo delle scienze applicate ed ingegneristico, esempi di sperimentazioni in cui si dispone di un insieme di dati, generalmente *arbitrario, in numero e tipologia dei suoi elementi*, a partire dal quale si vuole risalire alla sorgente che, in qualche modo, li ha prodotti. *Problemi di questo tipo sono riferiti, in letteratura, come* **problemi inversi con dati discreti**. In relazione ad essi nasce l'esigenza di realizzare **metodi numerici per l'inversione reale, o complessa, della trasformata di Laplace con dati discreti**.

Sono numerosi, in effetti, i problemi applicativi nei quali i dati sono il risultato di analisi sperimentali di natura diversa, in cui la descrizione del fenomeno che li ha generati si riconduce al calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace. Solo per citare un esempio di *applicazione della chimica fisica*, i dati derivanti da *spettroscopia NMR*, ovvero rilevati attraverso tecniche di indagine basate su risonanza magnetica nucleare, sono l'effetto di

fenomeni descritti attraverso trasformata di Laplace della sorgente che li ha prodotti (cfr. cap. 6).

Il problema di inversione della Trasformata di Laplace **con dati discreti** è intimamente **mal posto** in relazione alla non unicità della soluzione, ovvero dell'antitrasformata. Quando si affronta il problema dell'inversione della trasformata di Laplace, è di fondamentale importanza *distinguere* il *caso* in cui la funzione trasformata si assume *reale*, di variabile reale, dal *caso complesso*. Il primo è notoriamente *mal posto*, secondo la definizione di Hadamard ¹, in relazione alla non continuità dell'inversa di applicazioni indotte dall'operatore di Trasformazione di Laplace, \mathcal{L} , tra spazi di funzioni definite in \mathbb{R}^+ [13]. Il secondo è, invece, *ben posto*. L'applicazione di un metodo numerico conduce alla risoluzione di problemi discreti che riflettono le caratteristiche dell'operatore \mathcal{L}^{-1} . La discontinuità dell'operatore inverso si manifesta, infatti, nel mal-condizionamento del problema discreto e, quindi, nell'instabilità della soluzione del problema di inversione $f = \mathcal{L}^{-1}[F]$; ciò comporta un'amplificazione incontrollabile, nella soluzione, degli errori inevitabilmente presenti nei dati.

1.2 Il contesto scientifico

La letteratura relativa al problema del calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace in presenza di dati discreti è notevolmente scarna. Citiamo gli approcci classici, con cui, nel corso degli anni e fino ad oggi, è stato affrontato il problema di interpretare dati preassegnati come valori di una funzione, trasformazione integrale di una funzione incognita da determinare.

Risale al 1956 [31] uno dei primi lavori sul calcolo numerico dell'antitrasformata, nota la Trasformata in corrispondenza di un insieme di punti

¹La nozione di problema *mal posto* si deve ad Hadamard che, nel 1923, introdusse il concetto di *well-posed* ed *ill-posed problems*; a quest'ultima classe appartengono quei problemi la cui soluzione, se esiste, non è unica o non dipende in maniera continua dai dati; in assenza di stabilità dell'applicazione inversa, anche piccoli errori introdotti nei dati si amplificano notevolmente nella soluzione rendendola, talvolta, inaccettabile. Al contrario, nei problemi "ben-posti", per i quali la soluzione esiste, unica e dipende con continuità dai dati, arbitrariamente "piccole" perturbazioni nei dati determinano altrettanto piccole perturbazioni della soluzione.

equispaziati, p_k , disposti sull'asse reale secondo una distribuzione del tipo:

$$p_k = a + k\sigma, \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \dots, m, \dots \quad (1.1)$$

con a numero reale, appartenente alla regione di convergenza della trasformata e k intero positivo. Dall'insieme di punti $F(a + k\sigma)$, si determina l'espressione dell'antitrasformata, $f(t)$ a partire dalla quale resta univocamente determinata la trasformata.

Nella maggior parte dei lavori presenti in letteratura sul calcolo dell'antitrasformata di Laplace in presenza di dati discreti, l'approccio classico alla risoluzione del problema consiste, essenzialmente, nel *fitting dell'antitrasformata* [25], oppure nel suo *sviluppo in serie di funzioni ortogonali*, in particolare *polinomi* [11, 28, 31, 37] o in termini di *funzioni singolari* [4, 7]. In tutti i casi, inoltre, si suppone di disporre di un numero finito di valori di una funzione Trasformata di Laplace, *nota analiticamente*, da utilizzare nel calcolo dell'antitrasformata.

Non mancano, inoltre, lavori dedicati a problemi applicativi concreti, formulati attraverso modelli matematici riconducibili al calcolo dell'antitrasformata di una funzione, campionata in corrispondenza di un insieme finito di punti. Ad esempio [2], la risoluzione di un problema di *rilassamento energetico*, che si manifesta in seguito all'applicazione della tecnica di *risonanza magnetica nucleare (NMR)*; in esso, noto un campionamento finito di un segnale, dipendente dal tempo, lo si esprime come trasformazione di Laplace di una funzione densità di probabilità del tempo di rilassamento. Da un punto di vista matematico, dunque, il problema si riconduce a quello dell'*inversione numerica della trasformata di Laplace con dati discreti*.

1.3 Obiettivo della tesi

Il presente lavoro di tesi di dottorato descrive l'attività di ricerca svolta, nell'ambito del Dottorato di Ricerca in Scienze Matematiche, sul **problema di inversione numerica della Trasformata di Laplace con dati discreti**.

In particolare, l'interesse è stato rivolto alla risoluzione del problema che, in una prima formulazione, può essere descritto come segue:

Problema 1.1. *Data $F = \mathcal{L}[f]$ nota in un insieme finito di punti:*

$$F_i = F(s_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

determinare la f , antitrasformata di F .

Con il simbolo \mathcal{L} si indica l'operatore *trasformazione di Laplace*. $(F_i)_{i=1,\dots,n}$ sarà detto *vettore dei dati* o *dei campioni*.

Supponiamo, allora, di disporre di un insieme di campioni (reali o complessi) ed imponiamo su di essi l'**unico vincolo** di **essere valori di una funzione Trasformata di Laplace**.

L'obiettivo del lavoro si può illustrare distinguendo, in esso, due fasi:

Fase 1 definire un modello per l'**approssimazione numerica dei dati** (s_i, F_i) , $i = 1, \dots, n$.

Fase 2 Realizzare il **calcolo numerico dell'antitrasformata** di Laplace, utilizzando metodi, algoritmi e software già disponibili per esso.

1.4 Contributi

Il limite principale all'applicazione dei metodi, algoritmi e software, già esistenti per la risoluzione del problema di inversione della Trasformata di Laplace con dati discreti, sembra essere la stretta dipendenza dell'applicabilità del metodo di inversione dalla distribuzione dei campioni e dal loro numero. L'idea sulla base della quale si articola il lavoro, consiste nel determinare una funzione che, interpolando i valori noti e soddisfacendo alle proprietà della funzione Trasformata, possa assumersi come *buon modello* per i dati (s_i, F_i) , $i = 1, \dots, n$. Si riesce, in tal modo, a far fronte all'assenza di informazioni sulla trasformata, determinando una funzione che *la descriva*, in \mathbb{R} o \mathbb{C} ed, in generale, in tutta la sua regione di convergenza.

A tal proposito, è stata definita una spline *generalizzata*, detta s_{Lt} , che fosse interpolante i campioni e tale da soddisfare le proprietà che caratterizzano l'andamento della trasformata, in particolare all'infinito.

1.5 Sviluppo e fasi della ricerca

Il lavoro di tesi si articola in una serie di fasi che rispecchiano, in qualche modo, l'evoluzione del lavoro e degli obiettivi proposti ed affrontati, nella risoluzione del problema in esame.

Il primo obiettivo è stato la determinazione del modello. A tale scopo è stato realizzato uno studio delle *funzioni splines*, con particolare attenzione sia alle diverse famiglie di splines, quali le polinomiali e le loro generalizzazioni, sia ai metodi computazionali per la loro costruzione e valutazione, nonché alle loro proprietà. Notevole, a tal proposito, il riferimento alle monografie [14] e [38].

Sono state individuate, inoltre, le proprietà che, in qualche modo, influenzano l'andamento, al finito così come all'infinito, di una funzione trasformata di Laplace. Sulla base di queste, e tenendo conto della analiticità della trasformata nella sua regione di convergenza [23]-[24], è stata particolarizzata la spline, definendo una funzione *ad hoc* per il problema in esame, ovvero interpolante, regolare e con proprietà analoghe a quelle di una funzione Trasformata di Laplace.

È stato formulato, dapprima, il problema di inversione con dati discreti, distinguendo il caso in cui i dati siano assegnati nel campo complesso, da quello in cui essi siano reali.

Una sezione dedicata ai test illustra i risultati ottenuti sia nel caso reale che complesso.

L'interesse per il problema di **inversione reale**, è prevalso, poi, sul caso complesso, sia in relazione al tipo di dati, risultanti da analisi sperimentali realizzate in problemi applicativi concreti di diversa natura, sia in relazione al mal posizionamento del problema reale che lo rende particolarmente interessante dal punto di vista numerico. Esso è, infatti, il principale stimolo verso la continua *sfida* nella messa a punto o modifica di metodi esistenti, e, dunque, nella realizzazione di algoritmi computazionalmente efficienti, la cui implementazione, in elementi di software matematico, consenta la effettiva risoluzione del problema di inversione (reale) della trasformata di Laplace,

con dati discreti.

Sono, dunque, stati realizzati, dapprima, test *sintetici*; in essi, assumendo nota la funzione che genera i campioni, è stato confrontato l'andamento della spline generalizzata, definita nel lavoro, con la Trasformata, stimando opportunamente l'errore commesso valutando le due funzioni su intervalli più o meno ampi dell'asse reale; per confermare ed apprezzare la validità del modello proposto, abbiamo, inoltre, eseguito un confronto con alcuni modelli di fitting noti, ovvero con le *classiche* splines polinomiali. Infine, a completamento della fase di testing sintetico, abbiamo realizzato esperimenti di inversione reale, in cui, assegnato un insieme di campioni, assunta nota, ancora, la funzione Trasformata che li ha generati, è stata costruita la spline interpolante, eventualmente valutata in intervalli di ampiezza variabile; è stato, allora, sperimentato l'utilizzo di un metodo per l'inversione reale della Trasformata e, quindi, confrontata la funzione ottenuta con l'antitrasformata nota, allo scopo di stimare l'accuratezza fornita e, dunque, la complessiva attendibilità del modello nella risoluzione del problema di inversione con dati discreti.

Infine, dedotta la bontà del metodo proposto, attraverso le esperienze realizzate su dati sintetici, l'ultima parte del lavoro, nonché *la più delicata*, è stata la messa a punto di test realizzati su campioni rilevati da problemi applicativi concreti, in cui i dati sono il risultato di analisi sperimentali di varia natura, ad esempio spettroscopia NMR o diffrazione dei raggi X. In essi non è nota l'espressione analitica della funzione Trasformata che li ha generati, di cui si intende calcolare l'antitrasformata.

Relativamente a quest'ultima, bisogna tener conto che, a causa della *mal posizione* del problema inverso, sebbene si riesca a determinare un'approssimazione, s_{Lt} , sufficientemente accurata di F , dunque un *buon* modello, tale che

$$\|s_{Lt} - F\| = \epsilon$$

con $\epsilon > 0$, questo non garantisce che la funzione

$$\tilde{f} = \mathcal{L}^{-1}[s_{Lt}],$$

ammesso che s_{Lt} sia L -antitrasformabile, fornisca un'approssimazione altrettanto accurata dell'antitrasformata f di F . Si ha, infatti:

$$\|s_{Lt} - F\| = \epsilon \quad \Rightarrow \quad \sigma = \|f - \tilde{f}\| = \|\mathcal{L}^{-1}[F] - \mathcal{L}^{-1}[s_{Lt}]\| \leq \underbrace{\|\mathcal{L}^{-1}\|}_{\mu=\infty} \cdot \epsilon = \mu \cdot \epsilon$$

L'affidabilità dell'approssimazione di f dipenderà, quindi, dalla scelta del metodo numerico $\tilde{\mathcal{L}}$ con cui si calcola \tilde{f} , ovvero con cui si costruisce l'approssimazione di \mathcal{L}^{-1} . Esso dovrà essere *ben condizionato* e per esso dovranno essere formulati algoritmi *stabili* implementati in opportuni elementi di software matematico.

1.6 Articolazione della tesi

Si descrive, brevemente, l'articolazione del lavoro di tesi.

Nel **Capitolo 2** si illustrano le problematiche incontrate nella formulazione della funzione spline generalizzata. In particolare si fornisce, dapprima, la formulazione del problema su cui verte il lavoro di tesi di dottorato, distinguendo il caso in cui i campioni sono reali, e, dunque, si suppone che la trasformata che li ha generati sia reale, di variabile reale, dall'analogo caso complesso. Successivamente, sulla base di una serie di considerazioni sulle famiglie di funzioni spline, sulle loro generalizzazioni e sulle proprietà di cui gode la trasformata di Laplace, si formula il modello matematico che realizzi il fitting di valori *reali* di una Trasformata di Laplace. Si definisce, cioè, la spline generalizzata, che sarà assunta come trasformata di Laplace. Se ne illustra, infine, un metodo costruttivo, finalizzato ad una sua implementazione. Si accenna, inoltre, brevemente, ad alcune idee e spunti risolutivi volti alla formulazione di un modello analogo nel caso complesso.

Nel **Capitolo 3** si descrivono test nel caso reale, in cui si confronta l'accuratezza fornita dal modello descritto, con quella di alcune spline note (*cubica naturale*, *complete*, *not a knot* e *smoothing spline*) dalle quali differisce, essenzialmente, per le condizioni al contorno imposte sulla funzione spline e sulle sue derivate; queste incidono sull'andamento dei modelli e, quindi, sull'approssimazione della Trasformata di Laplace all'esterno dell'intervallo in cui cadono i campioni e, quindi, all'infinito.

Il **Capitolo 4** è dedicato alle esperienze numeriche realizzate nel caso com-

plesso e ad alcune considerazioni emerse dai test, utili alla determinazione del modello complesso.

Contestualizzando la ricerca al caso reale, definita la spline generalizzata e stimata l'approssimazione fornita, in particolare rispetto ai "classici" modelli di splines utilizzati nell'approssimazione di dati, nel **Capitolo 5** si descrivono alcuni test realizzati utilizzando un metodo per l'inversione numerica della trasformata di Laplace nel caso reale; si stima, quindi, l'accuratezza fornita dalla funzione calcolata.

Nel **Capitolo 6** si illustrano esempi di studio relativi all'applicazione del metodo di inversione proposto a problemi applicativi concreti, in cui i dati discreti derivano da analisi sperimentali.

Infine, nel **Capitolo 7**, si propongono alcuni problemi ancora aperti e raffinamenti possibili, ad esempio nella determinazione del modello analogo nel caso complesso; si pone l'attenzione, inoltre, sulla possibilità di ridurre l'errore di approssimazione della spline e di tradurre in vincoli da imporre sull'andamento della funzione calcolata, informazioni note *a priori* sull'antitrasformata; infine, in relazione al metodo di inversione applicato, i risultati ottenuti nelle esperienze numeriche effettuate costituiscono un punto di partenza per la realizzazione di uno studio dell'*analisi dell'errore* al fine di migliorare il *trade-off* tra efficienza ed accuratezza prodotta nel calcolo dell'antitrasformata, quando le informazioni di cui si dispone sono dati sperimentali, di origine incognita, sui quali l'unica assunzione è che siano valori di una funzione Trasformata di Laplace.

Capitolo 2

Formulazione del modello

2.1 Introduzione

Supponiamo di dover risolvere il seguente:

Problema 2.1. *Data $F = \mathcal{L}[f]$ nota in un insieme finito di punti:*

$$F_i = F(s_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

determinare la f , antitrasformata di F .

Supponiamo che f sia una funzione della variabile $t > 0$, a **valori reali** o **complessi**¹, mentre s sia un parametro reale o complesso. Richiamiamo, brevemente, la definizione ed alcune proprietà che caratterizzano una Trasformata di Laplace:

Definizione 2.1. *La funzione $f(t)$ si dice **Trasformabile secondo Laplace** (L -trasformabile), se:*

1. $f(t)$ è definita q.o. in \mathbb{R}^+ , ivi misurabile rispetto alla misura di Lebesgue;
2. $f(t)$ è localmente sommabile in \mathbb{R}^+ , cioè sommabile su ogni insieme compatto di \mathbb{R}^+ ;

¹Consideriamo, in effetti, il caso

$$f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

3. esiste almeno un valore s_0 della variabile complessa s per cui risulti convergente l'integrale improprio:

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} f(t) dt \quad (2.2)$$

In tal caso, l'integrale (2.2) viene detto **integrale di Laplace** relativo a $f(t)$ nel punto s_0 .

Si dimostra [24] che, se l'integrale di Laplace relativo a $f(t)$ converge per un certo valore s_0 di s , allora ogni s tale che $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$ è un punto in cui l'integrale converge:

Teorema 2.1. *Se l'integrale:*

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t} f(t) dt$$

è convergente, allora risulta convergente l'integrale:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

per tutti i valori di s tali che $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$.

Detto $\mathcal{C}(f)$ il sottoinsieme del campo complesso \mathbb{C} costituito dagli infiniti valori della variabile complessa, in corrispondenza dei quali l'integrale di Laplace di f converge, ha senso dare la seguente [24]:

Definizione 2.2. *Diremo **Trasformata di Laplace** di $f(t)$ la funzione $F(s)$ complessa, di variabile complessa, definita nel modo seguente:*

$$F : s \in \mathcal{C}(f) \rightarrow F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \in \mathbb{C} \quad (2.3)$$

Si deduce, allora, che quando il limite

$$F(s) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{-st} f(t) dt \in \mathbb{C},$$

esiste finito, l'integrale è detto convergere e la funzione Trasformata di Laplace di $f(t)$ è definita attraverso l'operatore integrale; altrimenti l'integrale diverge e non è definita la trasformata di Laplace di f .

L'insieme $\mathcal{C}(f)$ è detto **regione di convergenza** di F . L'estremo inferiore α_f di tutti i numeri *reali* α , tali che $\mathcal{C}(f)$ contiene un s con $Re(s) = \alpha$ è detto l'**ascissa di (semplice) convergenza** dell'integrale di Laplace (2.3). In particolare, se $\mathcal{C}(f)$ è vuoto, si pone $\alpha_f := -\infty$. Se, dunque, α_f è finito, allora $\mathcal{C}(f)$ contiene tutti i numeri complessi s tali che $Re(s) > \alpha_f$, e non contiene gli s tali che $Re(s) < \alpha_f$. Nulla si può dire, in generale, sulla convergenza dell'integrale di Laplace nei punti con $Re(s) = \alpha_f$. Vale, dunque, il seguente:

Teorema 2.2. *L'insieme di (semplice) convergenza di un integrale di Laplace, se non vuoto, è l'intero piano complesso oppure un semipiano destro, potendo includere tutti o alcuni dei punti di frontiera.*

Richiamiamo, brevemente, alcune proprietà della Trasformata di Laplace. Le trasformate di Laplace sono funzioni analitiche, nonché infinitesime al divergere della variabile indipendente s . A proposito dell'olomorfia, ricordiamo il seguente [24]:

Teorema 2.3. *Sia $f(t)$ una funzione L-trasformabile, con ascissa di convergenza finita, $\alpha_f < \infty$. Allora $F = \mathcal{L}[f]$ è analitica in $\overset{o}{\mathcal{C}}(f)$, cioè in corrispondenza di tutti i punti s tali che $Re(s) > \alpha_f$.*

Vale, inoltre, il seguente:

Teorema 2.4. *Sia $f(t)$ una funzione L-trasformabile, con ascissa di convergenza finita, $\alpha_f < \infty$. Allora, per ogni $n = 1, 2, \dots$ le funzioni $t^n f(t)$ hanno Trasformata di Laplace $(-1)^n F^{(n)}(s)$; la loro ascissa di convergenza è minore o uguale ad α_f .*

Sia, dunque, $f(t)$ una funzione L-trasformabile, con $\alpha_f < \infty$; è chiaro che, dall'essere analitica in $\overset{o}{\mathcal{C}}(f)$, è ivi anche continua. In effetti si dimostra [24] che F è continua anche nei punti di frontiera della sua regione di convergenza.

Particolare attenzione, poniamo, però, in relazione alla risoluzione del problema in esame, oltre che alla analiticità della Trasformata, anche al suo andamento all'infinito.

In base a quanto enunciato, una Trasformata di Laplace è dotata di derivate di ogni ordine, nella regione di convergenza. I teoremi seguenti consentono di ricavare proprietà sul comportamento asintotico della Trasformata,

sfruttando la sua definizione e nella sola ipotesi che la funzione $f(t)$ sia sommabile in \mathbb{R}^+ . Si prova, innanzitutto, che la Trasformata di Laplace è una funzione infinitesima, attraverso valori reali che divergono verso infinito ². Si dimostra [24], infatti, il seguente:

Teorema 2.5. *Sia $f(t)$ una funzione L -trasformabile e sia σ_0 un valore reale tale che*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\sigma_0 \tau} f(\tau)| d\tau < \infty,$$

con $f(\tau) = 0$, per ogni $\tau < 0$. Allora $F = \mathcal{L}[f]$ soddisfa la

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0, \quad (2.4)$$

dove s tende a infinito nel semipiano $Re(s) \geq \sigma_0$.

e valgono, inoltre i teoremi seguenti:

Teorema 2.6. *Sia $f(t)$ una funzione sommabile in \mathbb{R}^+ . Detto S_0 il semipiano chiuso definito da*

$$S_0 = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq 0\}$$

si ha:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0, \quad s \in S_0$$

Teorema 2.7. *Sia $f(t)$ una funzione L -trasformabile nel semipiano di convergenza, $Re(s) > \alpha_f$, e sia $F = \mathcal{L}[f]$. Fissato ad arbitrio un numero reale $\eta > \alpha_f$ e detto S_η il semipiano chiuso definito da*

$$S_\eta = \{s \in \mathbb{C} : Re(s) \geq \eta\},$$

si ha:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{F(s)}{s} = 0, \quad s \in S_\eta \quad (2.5)$$

²In effetti la proprietà è vera anche quando s tende a infinito lungo un raggio nel piano complesso che formi un angolo minore di $\pi/2$ con l'asse reale.

Il punto $s = \infty$ è, dunque, un punto in cui la F è regolare, essendo, in particolare, uno zero per la funzione. Vale, infine, per la Trasformata di Laplace la proprietà

$$\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} s \cdot F(s) < \infty \quad (2.6)$$

Le (2.4), (2.5) e la (2.6) si formulano in maniera analoga quando la Trasformata è ristretta all'asse reale.

Sulla base della definizione e delle proprietà della Trasformata all'infinito, cerchiamo, ora, un modello approssimante per la funzione Trasformata, in tutta la sua regione di convergenza.

2.2 Prerequisiti

Supponiamo di disporre di un insieme finito di dati, arbitrario in numero e tipologia dei suoi elementi. Poniamo, su di essi, il **solo vincolo** di essere **valori di una Trasformata di Laplace**. Il nostro obiettivo è determinare una funzione che si possa ritenere un *buon modello* per la Trasformata di Laplace. Ricordiamo, a tal proposito, la seguente:

Definizione 2.3. (fitting o modello)

*Dato un insieme finito di dati $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, n}$, appartenenti ad un intervallo I , tale cioè che $\{x_i\} \subset I$, ogni funzione f , definita su I , che descrive D , si dice un **fitting o modello** per D ; tale funzione è detta, poi, **interpolante** D se sono soddisfatte le condizioni di interpolazione sulla funzione e/o sulle sue derivate nei punti assegnati, del tipo:*

$$f(x_i) = y_i \quad (\text{in generale } f^{(j)}(x_i) = y_i^j, \quad j \in J \subseteq \mathbb{N}_0), \quad \forall i = 1, \dots, n;$$

*il modello è detto, invece, **approssimante** (di ordine ϵ) se si richiede che la distanza, misurata in una opportuna norma, tra la funzione approssimante ed i punti assegnati, sia minore di ϵ .*

Nella sola ipotesi che i campioni siano valori di una Trasformata di Laplace, gli unici requisiti da poter imporre, sul modello sono i seguenti:

- ◇ **essere interpolante i campioni;**

in effetti sono le uniche informazioni di cui disponiamo, dunque è naturale imporre che la funzione da definire abbia in comune con la Trasformata da approssimare *almeno* i valori noti;

◇ **essere sufficientemente regolare;**

essa deve, in effetti, approssimare una Trasformata di Laplace, che è analitica in tutta la sua regione di convergenza. In particolare $F \in C^\infty((\alpha_f, +\infty))$, quando si assume reale di variabile reale. Infine deve

◇ **soddisfare proprietà analoghe a quelle di una Trasformata di Laplace.**

In generale, non esistono condizioni necessarie e sufficienti che garantiscano che una funzione sia una Trasformata di Laplace. Si può, però, fare riferimento al comportamento asintotico della funzione, nonché al suo campo di olomorfia. Cerchiamo, allora, una funzione che soddisfi le proprietà (2.4), (2.5) e (2.6).

Prima di definire il modello, distinguiamo due riformulazioni per il **Problema 2.1**, in base al dominio di definizione della funzione Trasformata di Laplace, ovvero all'ipotesi che i campioni siano numeri reali oppure valori complessi.

Problema 2.2. [Caso reale]

Dati i punti del piano $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tali che

$$y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

*con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Trasformata di Laplace **incognita**, si vuole determinare una funzione s , definita in un opportuno spazio di Banach \mathcal{B} , che sia **interpolante** i punti assegnati e tale che si scosti il meno possibile da F in $[\alpha_f, +\infty)$, dove lo scostamento tra F e s è misurato dalla norma sullo spazio \mathcal{B} , della differenza tra F e s , dunque tale che:*

$$\exists \epsilon > 0 : \quad \|s - F\| < \epsilon$$

Cerchiamo, allora, una funzione s che interpoli i campioni assegnati ed abbia un andamento analogo a quello della Trasformata che li ha generati, per cui ne risulti una approssimazione *sufficientemente accurata*, in una fissata norma.

Problema 2.3. [Caso complesso]

Date le coppie di valori complessi $(z_i, w_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, tali che

$$z_i = x_i + i y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e

$$\begin{aligned} w_i = F(z_i) &= \text{real}(F(z_i)) + i \text{imag}(F(z_i)) = \\ &= u(x_i, y_i) + i v(x_i, y_i) = u_i + i v_i, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

*con $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ Trasformata di Laplace **incognita**, si vuole determinare una funzione sull'insieme dei nodi $K = \{z_1, \dots, z_n\}$, che sia **interpolante** i punti assegnati e tale che, nella regione di convergenza di F :*

$$\exists \epsilon > 0 : \quad \|s - F\| < \epsilon$$

in una fissata norma. In effetti, il problema è riconducibile alla determinazione di due funzioni reali in due incognite reali, s_{re} e s_{im} , approssimazioni delle funzioni parte reale, $u = \text{real}(F)$ e coefficiente della parte immaginaria, $v = \text{imag}(F)$, della Trasformata. Infatti, dall'essere

$$\|s_{re} - u\| < \epsilon_1$$

e

$$\|s_{im} - v\| < \epsilon_2$$

segue:

$$\begin{aligned} \|s - F\| &= \|(s_{re} + i s_{im}) - (u + i v)\| < \\ &< \|s_{re} - u\| + \|s_{im} - v\| < \\ &< \epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon \end{aligned}$$

Esistono diversi modelli matematici per la determinazione di una funzione interpolante un insieme finito di dati.

Nell'approssimazione di funzioni regolari si preferiscono, in generale, le **funzioni splines**, che forniscono il giusto compromesso tra l'esigenza di utilizzare polinomi di grado basso e quella di godere di una regolarità sufficientemente elevata.

Sulla base di queste considerazioni scegliamo di determinare il **modello sottoforma di funzione spline**. In particolare costruiamo un funzionale di cui tale spline sia il minimo, in un opportuno spazio di funzioni.

Per risolvere il problema della *regolarizzazione* dei dati, è noto il:

Metodo di Schoenberg

Assegnati i nodi $x_i \in \mathbb{R}$ ed i valori $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, e definito il funzionale

$$sw(s) = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - s(x_i)]^2 + g \int_a^b [s''(x)]^2 dx$$

con g costante positiva, $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, pesi assegnati e $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$, si cerca una funzione $\bar{s} \in C^2([a, b])$, $n \geq 2$, tale che

$$\bar{s} = \arg \min_{s \in C^2([a, b])} sw(s).$$

Si dimostra [21] che, assegnato un insieme finito di nodi distinti, $K = \{x_1 < \dots < x_n\}$ dell'asse reale, ed un vettore di interi positivi, w_1, \dots, w_n , l'unica *spline cubica naturale*, interpolante i nodi di K , minimizza il funzionale sw , tra tutte le funzioni $C^1([a, b])$, con derivata seconda continua a tratti ³. Dunque, tra tutte le funzioni $g \in C^2([a, b])$, che risolvono il problema di interpolazione $g(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$, la spline cubica naturale interpolante è la più regolare, in quanto minimizza l'integrale

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx$$

Partiamo, allora, dalla definizione di spline cubica:

Definizione 2.4. (Spline cubica)

Assegnato un insieme strettamente crescente:

$$K = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

con gli x_i , $i = 1, \dots, n$ appartenenti all'asse reale e $x_0 = -\infty$ e $x_{n+1} = +\infty$, una funzione s , definita su tutto l'asse reale, è una **spline cubica relativa** all'insieme dei nodi K , se:

- $s(x) \equiv p_i(x) \in \Pi_3$ per $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n$
- $s(x), s'(x), s''(x) \in C((-\infty, +\infty))$ ($s(x) \in C^2((-\infty, +\infty))$).

In generale, un problema di interpolazione mediante spline non è caratterizzato dall'unicità della soluzione, a meno di imporre opportune condizioni nei nodi, generalmente nei due nodi estremi, x_1 e x_n . In base a queste ultime si

³La proprietà si generalizza [21] per spline di grado dispari, $m = 2k - 1$. In tal caso si dimostra che esiste un'unica *spline di grado $2k - 1$, interpolante* i nodi $x_1 < \dots < x_n$, che minimizzi il funzionale sw , tra tutte le funzioni $f \in C^{k-1}[a, b]$, con derivata k -esima continua a tratti.

distinguono, ad esempio, in letteratura, la *spline cubica naturale, complete, not a knot* o *periodica*. In effetti, sono state realizzate alcune esperienze numeriche, riportate nei paragrafi ad esse relative, in cui la Trasformata è stata approssimata attraverso questi ed altri *classici* modelli di spline polinomiali, per l'esattezza la *cubica naturale*, la *complete*, la *not a knot* e la *smoothing spline*⁴, riscontrando per esse una accuratezza soddisfacente nell'approssimazione della Trasformata nei sottointervalli dell'asse reale individuati dai nodi di costruzione. Al contrario, l'approssimazione si è rivelata meno accurata all'esterno di $[x_1, x_n]$, in particolare in $[x_n, +\infty)$.

Tali modelli, in effetti, si distinguono per le condizioni al contorno imposte sulla funzione spline e/o sulle sue derivate, che condizionano l'andamento della funzione negli intervalli $(-\infty, x_1]$ e $[x_n, +\infty)$.

Sulla base di queste considerazioni e dei risultati riscontrati, vogliamo definire una **spline generalizzata** che sia, in particolare, una **spline polinomiale in $[x_1, x_n]$** , dunque al finito, tra i nodi di costruzione; per essa, poi, sarà necessario **particolarizzare l'andamento all'infinito, in $[x_n, +\infty)$** , in relazione al problema in esame; la spline generalizzata definita sarà interpolante i campioni e sarà, inoltre, l'unico minimo di un funzionale, su uno spazio di funzioni definito in maniera opportuna. Dimosteremo, inoltre, che questo minimo soddisfa le proprietà asintotiche della Trasformata di Laplace.

Formuliamo, dunque, il metodo che proponiamo per realizzare il fitting di valori di una Trasformata di Laplace.

Fitting di valori di una Trasformata di Laplace

Assegnati i punti del piano $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tali che

$$y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Trasformata di Laplace **incognita**, sia:

$$sw_F(s) = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - s(x_i)]^2 + \rho \int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx \quad (2.7)$$

⁴Per *smoothing spline* si intende un modello di spline polinomiale o, meglio cubica, definita come minimo di un funzionale di *tipo Schoenberg*.

con ρ costante positiva, $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, pesi assegnati e

$$K = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

dove $x_0 = \alpha_f$, ascissa di convergenza della Trasformata di Laplace e $x_{n+1} = +\infty$, si cerca una funzione definita in $[x_1, +\infty)$ ed ivi continua con derivata prima continua, $\bar{s} \in C^1((x_1, +\infty))$, tale che

$$\bar{s} = \arg \min_{s \in \mathcal{F}} sw_F(s),$$

con⁵

$$\mathcal{F} = \{g \in C^1((x_1, +\infty)) \text{ t.c. } g \in S_3(K) \cap L^1([x_n, +\infty))\}.$$

Si osserva che la soluzione al problema dipende dal parametro ρ ed è tale che:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \bar{s}(x, \rho) &= \bar{s}(x), \quad \text{con} \quad \bar{s}(x_i) = y_i \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{s}(x, \rho) &= \bar{s}(x) \quad \text{con} \quad \bar{s}(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

Infatti, se $\rho \rightarrow 0$ la funzione in \mathcal{F} che minimizza il termine

$$\sum_{i=1}^n w_i [y_i - s(x_i)]^2$$

è quella interpolante i nodi assegnati.

Per $\rho \rightarrow 0$, affinché l'integrale

$$I(s) = \int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx \tag{2.8}$$

si mantenga finito deve essere:

$$I(\bar{s}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{s} \equiv 0$$

in $[x_1, +\infty)$.

Restringiamo, dunque, la nostra attenzione alle funzioni il cui comportamento è limitato all'infinito.

⁵Con $S_3(K)$ si fa riferimento all'insieme delle spline cubiche sull'insieme dei nodi K .

Definito, allora, il funzionale $sw_F(s)$, il problema è ricondotto alla determinazione della funzione **spline generalizzata, che appartenga allo spazio** \mathcal{F} e realizzi il minimo di $sw_F(s)$. Imponendo le condizioni di **interpolazione e regolarità nei nodi** di K e **definendo**, opportunamente, **la restrizione** all'intervallo $[x_n, +\infty)$, in modo che essa soddisfi le condizioni

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot s(x) &< \infty\end{aligned}$$

nonché la:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x} = 0,$$

si dimostra che la funzione risultante rende minimo il funzionale $sw_F(s)$ tra tutte le funzioni appartenenti ad \mathcal{F} . Essa sarà **unica** e la indicheremo con s_{Lt} .

Relativamente al caso complesso, in analogia al caso reale, si possono definire le due spline approssimanti, rispettivamente, parte reale e coefficiente dell'immaginario, di una Trasformata di Laplace complessa,

$$u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

come minimi di opportuni funzionali, che generalizzino, al caso multidimensionale, il funzionale (2.7). Formuliamo, cioè, per u e v , due problemi di *approssimazione di funzioni reali, in due variabili reali*.

In particolare, imponiamo la sommabilità di funzioni che coinvolgano le parti u e v . Se, infatti, la Trasformata F è definita nel semipiano $Re(s) \geq \alpha_f$, si cerca un'approssimazione per le funzioni reali $u(x, y)$ e $v(x, y)$ nella regione del piano xy che è esprimibile in coordinate cartesiane come $\Omega = [\alpha_f, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$; in particolare $u, v \in L^1(\Omega)$ se:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} |u(x, y)| dx dy &= \int_{\alpha_f}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, y)| dx dy < \infty \\ \iint_{\Omega} |v(x, y)| dx dy &= \int_{\alpha_f}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(x, y)| dx dy < \infty\end{aligned}$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} |z \cdot F(z)| &= |(x + i y)(u(x, y) + i v(x, y))| \leq \\ &\leq |z||u(x, y)| + |z||v(x, y)| \end{aligned}$$

dove $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ha senso, allora, cercare una spline $s = s_{re} + i s_{im}$, le cui parti, reale e coefficiente dell'immaginario, rendano *finite* le quantità reali

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot |u(x, y)| \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \cdot |v(x, y)|$$

Il funzionale da minimizzare, su un opportuno spazio di funzioni \mathcal{G}_1 , potrà, dunque, essere del tipo:

$$\sum_{i=1}^n w_i (s(x_i, y_i) - u_i)^2 + \rho \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot |s(x, y)| dx dy \quad (2.9)$$

con $\rho > 0$, $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, pesi assegnati e $u_i = u(x_i, y_i)$. La funzione spline generalizzata che minimizza (2.9) sarà s_{re} . Analogamente si ragiona per la parte immaginaria di $z \cdot F(z)$, costruendo il funzionale il cui minimo, su uno spazio di funzioni \mathcal{G}_2 , sia s_{im} .

Sulla base delle considerazioni illustrate nel §1.5, concentriamo l'interesse sul problema di **inversione reale**, limitandoci a fornire solo un cenno, nel §2.5, alla formulazione del modello nel caso complesso.

2.3 Formulazione del modello nel caso reale

Consideriamo il **Problema 2.2**. Dalla **Definizione 2.2** di Trasformata di Laplace segue che:

Proposizione 2.1. *Se f è una funzione reale a valori reali, per la Trasformata di Laplace di f vale:*

$$F(\bar{s}) = \overline{F(s)}$$

Il risultato ci consente di affermare che la restrizione di F al campo reale assume valori reali, dunque, possiamo considerare:

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

La teoria delle funzioni spline, definite in \mathbb{R} , può ritenersi abbastanza recente, se si considera che a partire dagli anni sessanta la letteratura scientifica relativa ad esse ha subito un notevole sviluppo restando, tuttavia, un'area di ricerca ancora attiva. La grande utilità delle funzioni spline, riscontrata nelle applicazioni, ha sancito l'incremento dell'interesse in questo campo. Le diverse classi di funzioni spline, definite nel corso degli anni, possiedono, infatti, interessanti proprietà che le caratterizzano e le rendono eccellenti strumenti finalizzati all'approssimazione di funzioni. Inoltre, la possibilità di memorizzare, valutare e maneggiare funzioni di tipo spline con efficienza computazionale notevole, ha determinato la loro applicazione in un'ampia varietà di problemi della matematica applicata, ad esempio fitting di dati, approssimazione di funzioni, quadratura numerica e calcolo numerico della soluzione, sia di equazioni differenziali, ordinarie o alle derivate parziali, che di equazioni integrali. Una interessante e dettagliata monografia sulla teoria di base delle funzioni spline si deve a Larry Schumaker [38].

Notevole è stato, nello sviluppo del lavoro di tesi, il riferimento al testo *A practical guide to Splines* di Carl de Boor [14], che tratta gli aspetti computazionali relativi all'implementazione di splines polinomiali, di cui sottolinea le proprietà di approssimazione di funzioni *smooth*, ponendo, inoltre, particolare attenzione alle B-splines ed alle loro applicazioni.

Tra le famiglie di funzioni spline, un'ampia letteratura è dedicata alle **spline polinomiali**.

In relazione al problema in esame, è immediata l'osservazione che un polinomio, e dunque una spline polinomiale, può comportarsi, all'infinito, come una funzione Trasformata di Laplace, ovvero può tendere a zero all'infinito, solo se in un suo intorno essa è una costante identicamente nulla⁶.

⁶In effetti se $p(z)$ è un polinomio di grado $n > 1$, quando la variabile z tende all'infinito lungo una parallela al semiasse reale positivo si ha:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| = +\infty$$

dunque $p(z)$ non è una Trasformata di Laplace in quanto non verifica la proprietà:

Teorema 2.8. *Se l'integrale di Laplace*

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$$

converge per $z = z_0$, la funzione $F(z)$, Trasformata di Laplace di f , è limitata in ogni dominio $\Omega(z_0, \psi)$, con $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$, delimitato dalla semiretta che parte da z_0 e forma, con

Una generalizzazione delle *spline polinomiali* è rappresentata dalle **spline di Chebyshev o T-splines** [38]. La caratteristica di queste ultime è che non si presentano come funzioni la cui restrizione ad ogni sottointervallo sia un polinomio bensì, assegnato un insieme di m funzioni (che formino un cosiddetto sistema di Chebyshev), di classe C^{m-1} , in ciascuno dei k sottointervalli di un intervallo $[a, b]$ (con $k + 1 \leq m$) la spline coincida con una delle funzioni del sistema, e tale che su tutto l'intervallo di definizione sia continua con le sue derivate fino all'ordine $m - 1$.

Ulteriormente, si definiscono le **spline generalizzate** [38], in maniera analoga alle T-splines, come funzioni la cui restrizione a ciascun sottointervallo può appartenere, però, a spazi di funzioni diversi, ma tali che queste restrizioni siano raccordate nei nodi attraverso funzionali *lineari* (eventualmente distinti) definiti su tali spazi, che, applicati a funzioni che rappresentano la spline in intervalli consecutivi, assumano su di esse gli stessi valori nei punti di raccordo. Quando, in particolare, questa condizione di uguaglianza è espressa attraverso la continuità delle derivate successive si può parlare di regolarità anche per la spline generalizzata. Secondo questa definizione si può richiedere, ad esempio, che le derivate fino ad un certo ordine (non necessariamente uguale per ogni nodo), siano continue. Si fornisce, di seguito, una definizione di **spline generalizzata** [38].

Sia Ω parzialmente ordinato e supponiamo che

$$\Delta = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_k\}$$

sia un insieme di elementi distinti in Ω . L'insieme Δ determina una partizione *la parallela al semiasse reale positivo condotta da z_0 , un angolo ψ .*

In particolare, se il polinomio fosse una costante non nulla, $p(z) = c \neq 0$, non potrebbe essere una Trasformata di Laplace in quanto, derivando sotto il segno di integrale si avrebbe

$$c = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt \quad \Rightarrow \quad 0 = - \int_0^\infty e^{-zt} t f(t) dt$$

La funzione $-t f(t)$ sarebbe, allora, quasi ovunque nulla in $(0, +\infty)$ e, dunque, tale sarebbe anche $f(t)$ ed il suo integrale di Laplace, contro l'ipotesi $c \neq 0$. In effetti, estendendo alle distribuzioni la definizione di Trasformata di Laplace, si possono riguardare anche i polinomi, funzioni che non risultano infinitesime all'infinito, come *Trasformate di Laplace di opportune distribuzioni*.

zione di Ω in $k + 1$ sottointervalli

$$\begin{aligned} I_0 &= \{x \in \Omega : x < x_1\}; \\ I_i &= \{x \in \Omega : x_i \leq x < x_{i+1}\}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1; \\ I_k &= \{x \in \Omega : x_k \leq x\}. \end{aligned}$$

Supponiamo che gli

$$\mathcal{U}_i = \text{span}\{u_j^i\}_{j=1}^{n_i}$$

siano spazi *lineari* di dimensione finita, di funzioni definite su I_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Definiamo lo spazio analogo a quello dei polinomi a tratti, che indicheremo come:

$$\mathcal{PW}(\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k; \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} s : \text{esiste } s_i \in \mathcal{U}_i \text{ con} \\ s = s_i \text{ su } I_i, \quad i = 0, 1, \dots, k \end{array} \right\}$$

e gli insiemi

$$\{\underline{\gamma}_\nu^{ij}\}_{\nu=1}^{r_{ij}} \quad e \quad \{\bar{\gamma}_\nu^{ij}\}_{\nu=1}^{r_{ij}}$$

costituiti da funzionali *lineari* definiti sugli spazi \mathcal{U}_i e \mathcal{U}_j rispettivamente. Questi insiemi sono introdotti per definire i *funzionali lineari* che consentiranno di connettere, opportunamente, i tratti di una funzione, appartenente a \mathcal{PW} , in modo da renderla una funzione di tipo spline. Si suppone, dunque, che sia

$$\Gamma = \{\Gamma_{ij} : 0 \leq i < j \leq k\},$$

dove

$$\Gamma_{ij} = \{(\underline{\gamma}_\nu^{ij}, \bar{\gamma}_\nu^{ij})\}_{\nu=1}^{r_{ij}}, \quad 0 \leq i < j \leq k,$$

e si fornisce la seguente:

Definizione 2.5. *Sia*

$$\mathcal{S}(\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k; \Gamma; \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} s \in \mathcal{PW}(\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k; \Delta) \text{ tali che } \underline{\gamma}_\nu^{ij} s_i = \bar{\gamma}_\nu^{ij} s_j, \\ \nu = 1, 2, \dots, r_{ij}, \quad 0 \leq i < j \leq k \end{array} \right\}$$

Lo spazio \mathcal{S} è detto **spazio delle splines generalizzate relative a $\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k$, Γ e Δ** .

Quando si vuole esprimere il valore comune, assunto in corrispondenza dei

nodi da due funzioni, con cui si rappresenta la spline in due intervalli consecutivi, attraverso la continuità delle derivate successive, si può particolarezzare la definizione, ponendo $\mathcal{R} = (r_1, \dots, r_k)$, vettore di interi positivi, per cui si può riscrivere \mathcal{S} come:

$$\mathcal{S}(\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k; \mathcal{R}; \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} s \in \mathcal{PW}(\mathcal{U}_0, \dots, \mathcal{U}_k; \Delta) \text{ tali che} \\ D^{j-1}s_{i-1}(x_i) = D^{j-1}s_i(x_i), \\ j = 1, 2, \dots, r_i, \quad i = 1, \dots, k \end{array} \right\}$$

La scelta di costruire il modello approssimante la Trasformata di Laplace mediante una funzione di tipo spline è avvalorata, dunque, dalla possibilità che queste funzioni offrono, in particolare nell'accezione di *spline generalizzata*, di poter essere definite *localmente*, dunque intervallo per intervallo, in relazione alla funzione da approssimare, ovvero alle proprietà di correlazione che intervengono tra le grandezze, note o incognite, del problema in esame. Una spline generalizzata può, infatti, essere definita *ad hoc*, sia nella regione in cui cadono i campioni così come all'esterno dell'intervallo contenente in nodi, scegliendo le funzioni con cui rappresentarla, da raccordare opportunamente nei nodi, in relazione alla forma che si desidera attribuire al modello, alla regolarità da imporre o all'andamento da dover assumere.

In base alla definizione di spline generalizzata, lo spazio \mathcal{F} in cui cerchiamo il minimo del funzionale sw_F si può riscrivere come:

$$\mathcal{F} = \mathcal{S}(\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n; \Gamma; \Delta) = \mathcal{S}(\underbrace{\Pi_3, \dots, \Pi_3}_{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{n-1}}, \underbrace{L^1}_{\mathcal{U}_n}; \Gamma; \Delta) \quad (2.10)$$

dove le coppie di funzionali applicati agli spazi \mathcal{U}_i e \mathcal{U}_j , rispettivamente, sono:

$$\Gamma = \{\Gamma_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\},$$

con

$$\Gamma_{i,j} = \{D^2, D^2\}, \quad i = 1, \dots, n-2, \quad j = 2, \dots, n-1 \quad (2.11)$$

In base alla definizione di \mathcal{F} è anche $\Gamma_{n-1,n} = \{D^1, D^1\}$.

Allo spazio \mathcal{F} appartengono, dunque, le funzioni la cui restrizione all'intervallo $[x_1, x_n]$ sia una spline cubica, mentre nell'intervallo $[x_n, +\infty)$ si rap-

presenti mediante una funzione sommabile e, per definizione di \mathcal{F} , continua con derivata prima continua. In effetti, la regolarità di quest'ultima, insieme con la coppia di funzionali che costituiscono $\Gamma_{n-1,n}$, determina la regolarità delle funzioni di \mathcal{F} in tutto $[x_1, +\infty)$. Ad esempio, considerata una funzione s_2 , appartenente allo spazio $L^1([x_n, +\infty) \cap C^2([x_n, +\infty))$, imponendo

$$\Gamma_{n-1,n} = \{D^2, D^2\},$$

una spline generalizzata appartenente a \mathcal{F} , la cui restrizione in $[x_n, +\infty)$ sia s_2 , risulta $C^2([x_1, +\infty))$.

Particolarizziamo, ora, la funzione con cui si rappresenterà in $[x_n, +\infty)$ l'unica spline generalizzata di \mathcal{F} , interpolante i nodi, e che realizzi il minimo del funzionale sw_F .

2.3.1 Definizione della spline generalizzata

Assegnati i punti del piano $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tali che

$$y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Trasformata di Laplace **incognita**, costruiamo la **spline generalizzata** sull'insieme dei nodi

$$K = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

con $x_0 = \alpha_f$ e $x_{n+1} = +\infty$, tale che

$$s(x_i) = y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

A tal fine è necessario, innanzitutto, determinare lo spazio di funzioni che genera la spline generalizzata, ovvero definire la sua restrizione in $[x_n, +\infty)$, sulla base dell'andamento asintotico della Trasformata di Laplace, infinitesima all'infinito. Una prima idea è stata quella di utilizzare una funzione *razionale* del tipo

$$\frac{b}{x^3} \tag{2.12}$$

o, anche, più in generale,

$$\frac{b}{x^p}, \quad \text{con } p \geq 3 \quad (2.13)$$

Con la scelta $p \geq 3$, si escludono funzioni del tipo $1/x^p$, $0 \leq p \leq 2$, per le quali la funzione prodotto $x \cdot s(x)$, nella (2.7), sarebbe infinitamente grande all'infinito; si esclude, inoltre, la possibilità che la funzione approssimante in questo intervallo sia del tipo

$$a + \frac{b}{x^p}, \quad 0 \leq p \leq 2,$$

per cui resterebbe non soddisfatta la sommabilità della funzione $x s(x)$ in $[x_1, +\infty)$.

Una scelta del tipo (2.13) per descrivere l'andamento della funzione all'infinito risulta, però, come emerso anche dalle esperienze numeriche realizzate, troppo legata all'ordine di infinitesimo p fissato; inoltre, non tutte le funzioni che sono trasformate di Laplace sono di tipo razionale, bensì anche irrazionali e trascendenti.

Dal §2.1 ricordiamo alcune condizioni necessarie perché esista una funzione f , tale che F sia la Trasformata di Laplace di f :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} F(s) = 0 \quad (2.14)$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} s \cdot F(s) < \infty \quad (2.15)$$

Inoltre, fissato un $\eta > \alpha_f$, vale la seguente:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{s} = 0, \quad s > \eta \quad (2.16)$$

Definiamo, allora, la restrizione in $[x_n, +\infty)$, della spline generalizzata appartenente allo spazio \mathcal{F} , che minimizzerà il funzionale sw_F , tra le funzioni che soddisfano le proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = 0 \quad (2.17)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot s(x) < \infty \quad (2.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x} = 0 \quad (2.19)$$

Dalla (2.18), la s deve essere *infinitesimo di ordine maggiore o uguale ad uno*, essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot s(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{1/x} = l < \infty$$

da cui la funzione spline sarà sommabile se $l = 0$ e non lo sarà altrimenti.

Dimostriamo, innanzitutto, il seguente:

Proposizione 2.2. *Sia s_1 una spline polinomiale, di grado m , definita sull'insieme dei nodi $K = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$, con $x_0 = -\infty$ e $x_{n+1} = \infty$. Sia, inoltre, s una spline generalizzata, che coincida con s_1 in $[x_1, x_n]$:*

$$s(x) = s_1(x), \quad x \in [x_1, x_n]$$

ed ammetta, in $[x_n, +\infty)$, una rappresentazione mediante una funzione s_2 , reale e continua, tale che

$$\int_{x_n}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx < \infty \quad (2.20)$$

Allora la spline s soddisfa le (2.17) e (2.18).

Dimostrazione Per ipotesi $x \cdot s(x)$ è reale e continua in $[x_n, +\infty)$ ed, inoltre, $x \cdot s(x) \in L^1([x_n, +\infty))$. Dunque

$$\lim'_{x \rightarrow +\infty} |x \cdot s(x)| = 0$$

Inoltre, posto $s_x(x) = x \cdot s(x)$, si ha

$$s_x(x) \leq |s_x(x)| \Rightarrow s_x(x) \leq \inf |s_x(x)|$$

e

$$\sup s_x(x) \leq \sup \inf |s_x(x)|$$

ed, infine,

$$\sup_{x \rightarrow +\infty} s_x(x) \leq \sup \inf |s_x(x)| = 0$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot s(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{1/x} < \infty.$$

Allora la funzione $s(x)$ è infinitesima; inoltre è infinitesima con ordine di infinitesimo maggiore o uguale ad uno. Restano, dunque, soddisfatte le proprietà (2.17) e (2.18). \square

A partire dalla **Proposizione 2.2**, cerchiamo di definire la funzione s_2 . A tal fine, sebbene la spline resti definita su tutto l'asse reale, restringiamo l'attenzione al suo andamento nella regione di convergenza della Trasformata, di cui i dati si suppongono essere i valori in corrispondenza dei nodi. D'ora in avanti, quindi, faremo riferimento sempre alla definizione del modello approssimante nell'intervallo $[x_1, +\infty)$. In effetti, come per la definizione del modello in $[x_n, +\infty)$, sulla base dell'andamento asintotico della trasformata, disponendo di proprietà relative al suo andamento in un intorno dell'ascissa di convergenza, si potrebbe definire *ad hoc* anche la sua restrizione in $(\alpha_f, x_1]$.

Nelle ipotesi della **Proposizione 2.2**, la (2.20) è vera se la funzione prodotto $x \cdot s(x)$ è sommabile in tutto $[x_1, +\infty)$; la restrizione di s all'intervallo $[x_n, +\infty)$ deve essere, dunque, una funzione (reale e continua) *infinitesima*, con ordine di infinitesimo maggiore o uguale ad uno:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|s(x)|}{1/|x|^\alpha} = \begin{cases} l = 0 \\ 0 \neq l < \infty \end{cases} \quad \alpha \geq 1$$

In assenza di informazioni sull'ordine di infinitesimo della Trasformata e, dunque, da imporre sulla spline, costruiamo la spline in modo tale che la restrizione della funzione prodotto all'intervallo $[x_n, +\infty)$ sia

$$x \cdot s(x) = e^{-x},$$

ovvero abbia ordine di infinitesimo esponenziale (maggiore di α , $\forall \alpha$).

Idea: Costruire la spline generalizzata tale che,

$$s(x) = s_2(x) = \beta \cdot \frac{e^{-x}}{x}, \quad x \in [x_n, +\infty)$$

a meno di una costante, β da definire, opportunamente, imponendo condizioni di regolarità in x_n .

Osservazione 2.1. *Affinché la definizione di s_2 abbia senso si suppone che il nodo x_n sia positivo, essendo s_2 definita in $\mathbb{R}/\{0\}$.*

Con questa scelta per s , si dimostra il seguente:

Teorema 2.9. Sia s_1 una **spline polinomiale**, di grado m , definita sull'insieme dei nodi $K = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\}$, con $x_0 = -\infty$ e $x_{n+1} = \infty$. Sia, inoltre, s una **spline generalizzata**, che coincida con s_1 in $[x_1, x_n]$:

$$s(x) = s_1(x), \quad x \in [x_1, x_n]$$

ed ammetta, in $[x_n, +\infty)$, una rappresentazione del tipo

$$s(x) = s_2(x) = \beta \frac{e^{-x}}{x}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Allora

$$\int_{x_n}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx < \infty,$$

la funzione s è infinitesima all'infinito e valgono le proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} s(x) = 0 \quad (2.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot s(x) < \infty \quad (2.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x} = 0 \quad (2.24)$$

Dimostrazione Dalla (2.21) segue, a meno della costante β :

$$\int_{x_n}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx = \int_{x_n}^{+\infty} |e^{-x}| dx = [-e^{-x}]_{x_n}^{+\infty} = 0 + e^{-x_n} < +\infty$$

e, per la **Proposizione 2.2**, valgono le proprietà asintotiche. Infatti, la spline s soddisfa le (2.22) e (2.23), essendo, in particolare,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x s(x)|}{1/|x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1/|x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|^\alpha}{e^x} = 0, \quad \alpha \geq 1$$

Si osserva, infine, che, dalla definizione (2.21) resta soddisfatta anche la condizione (2.24):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{s(x)}{x} = 0, \quad x \in [x_n, +\infty)$$

essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x \cdot x^2} = 0, \quad x \in [x_n, +\infty)$$

□

Osservazione 2.2. La rappresentazione della spline generalizzata in $[x_n, +\infty)$

nasce da alcune osservazioni sulle Trasformate di funzioni di ordine esponenziale⁷. In tal caso, in effetti, fissato $t_0 > \alpha_f$, per ogni s tale che $\xi = \operatorname{Re}(s) > \alpha_f$, con $t_0 > \xi > \alpha_f$, se f è una funzione di ordine esponenziale a , si ha:

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_{t_0}^{\infty} e^{-\xi t} |f(t)| dt \leq \\ &\leq M \int_{t_0}^{\infty} e^{-(\xi-a)t} dt = M \left[\frac{e^{-(\xi-a)t}}{-(\xi-a)} \right]_{t_0}^{\infty} = \\ &= M \frac{e^{-(\xi-a)t_0}}{(\xi-a)}, \quad \xi = \operatorname{Re}(s) > \alpha_f \end{aligned}$$

da cui, $\forall \xi \geq \xi_0 > \alpha_f$ si trova il limite superiore

$$|F(s)| \leq M \frac{e^{-(\xi_0-a)t_0}}{(\xi_0-a)};$$

allora

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists T > 0 : t_0 \geq T > 0, \\ |F(s)| = \left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| < \epsilon, \quad \forall s \quad t.c. \quad \operatorname{Re}(s) = \xi \geq \xi_0 > \alpha_f \end{aligned}$$

cioè l'integrale di Laplace converge uniformemente nella regione del piano complesso costituita dai punti s la cui parte reale è $\xi = \operatorname{Re}(s) \geq \xi_0 > \alpha_f$. Il limite superiore per il modulo di F ha un andamento del tipo $\exp(-x)/x$.

Forniamo, allora, una definizione della spline generalizzata appartenente allo spazio \mathcal{F} , interpolante i valori di una Trasformata di Laplace, con proprietà asintotiche analoghe all'infinito.

Definizione 2.7. Siano assegnati i punti del piano $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tali che

$$y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Trasformata di Laplace **incognita**. Sia $K = \{x_0 < x_1 <$

⁷Si ricorda la definizione seguente:

Definizione 2.6. Una funzione f ha ordine esponenziale a se esiste una costante $M > 0$ ed una a , tali che, per qualche $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad t \geq t_0$$

$\dots < x_n < x_{n+1}\}$, con $x_0 = \alpha_f < x_1$ e $x_{n+1} = +\infty$, con α_f ascissa di convergenza di F . Definiamo s_{Lt} la **spline generalizzata** sull'insieme dei nodi K , che sia **interpolante**:

$$s_{Lt}(x_i) = y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

e tale che

$$s_{Lt}(x) = s_1(x) + s_2(x) \quad (2.25)$$

con s_1 spline polinomiale di grado 3 su K ⁸

$$s_1(x) = p(x) + \sum_{i=1}^n a_i (x - x_i)_+^3, \quad p \in \Pi_3 \Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^3 b_k x^k, \quad x \in [x_1, x_n]$$

e

$$s_2(x) = \beta \frac{e^{-x}}{x}, \quad x \in [x_n, +\infty)$$

Sia, inoltre, $s_{Lt} \in C^3(x_1, x_3)$ e $C^1((x_1, +\infty))$, ovvero la spline generalizzata goda di continuità della derivata prima nel punto di raccordo tra s_1 e s_2 .

Dalla **Definizione 2.7** segue che

$$s_{Lt}(x) \equiv s_1(x), \quad x \in [x_1, x_n]$$

e

$$s_{Lt}(x) \equiv s_2(x), \quad x \in [x_n, +\infty)$$

per cui

$$s_{Lt} \equiv s_1 \in C^2((x_1, x_n))$$

⁸Si ricorda che, per una spline polinomiale di grado m , relativa ad un insieme di nodi K , vale il seguente:

Teorema 2.10. [Rappresentazione della spline di grado m relativa all'insieme di nodi reali K] Ogni $s \in S_m(K)$ ha un'unica rappresentazione del tipo:

$$s(x) = p(x) + \sum_{i=1}^n a_i (x - x_i)_+^m, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{con } p \in \Pi_m \text{ e } x_+^r = \begin{cases} x^r, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

e

$$s_{Lt} \equiv s_2 \in C^\infty((x_n, +\infty) \setminus \{0\})$$

o, equivalentemente,

$$s_{Lt} \in C^\infty((x_n, +\infty)), \quad \text{se } x_n > 0,$$

La spline generalizzata della **Definizione 2.7**, interpolante i campioni assegnati, appartiene, dunque, allo spazio

$$\mathcal{F} = \mathcal{S}(\Pi_3, \dots, \Pi_3, L^1; \Gamma; \Delta)$$

definito nella (2.10), sebbene si possa fissare, per essa, la coppia

$$\Gamma_{1,2} = \{D^3, D^3\},$$

piuttosto che $\Gamma_{1,2} = \{D^2, D^2\}$. La funzione

$$\frac{e^{-x}}{x}$$

è, inoltre, infinitesima all'infinito, con ordine di infinitesimo maggiore di uno, dunque sommabile in $[x_n, +\infty)$. La definizione di s_{Lt} , come già osservato, impone la continuità della spline e della sua derivata prima in x_n . In effetti, in base alla **Definizione 2.5**, la funzione a tratti si può considerare una spline generalizzata se esistono due funzionali lineari, L_1 e L_2 , definiti, rispettivamente, sullo spazio Π_3 , cui appartiene la restrizione $s_{1,n-1} = s_1/[x_{n-1}, x_n]$ di s_1 e sullo spazio di funzioni generato da s_2 che, applicati rispettivamente alle funzioni $s_{1,n-1}$ e s_2 , assumano lo stesso valore. Ad esempio si può imporre la continuità della s''_{Lt} in x_n , ottenendo una funzione $s_{Lt} \in C^2((x_1, +\infty))$. La scelta delle condizioni di regolarità, da imporre in x_n , sarà dettata da considerazioni di carattere computazionale, nel paragrafo relativo al **metodo costruttivo per il calcolo dei coefficienti di s_{Lt}** . In effetti, la spline che implementeremo sarà $C^1((x_1, +\infty))$.

La *spline generalizzata* della **Definizione 2.7** soddisfa le ipotesi del **Teorema 2.9**.

Vale, inoltre, il seguente:

Teorema 2.11. *La spline generalizzata $s = s_{Lt}$ soddisfa la condizione di*

sommabilità:

$$\int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx < \infty$$

Dimostrazione Segue dalla definizione stessa di s_{Lt} . □

Dimostriamo, inoltre, il seguente:

Teorema 2.12. *Sia s_{Lt} la spline della Definizione 2.7. Allora*

$$\int_{x_n}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx \leq \int_{x_n}^{+\infty} |x \cdot g(x)| dx$$

per ogni g continua e reale, tale che la funzione prodotto $x \cdot g(x) \in C^1([x_n, +\infty)) \cap L^1([x_n, +\infty))$.

Dimostrazione Dall'ipotesi $x \cdot g \in L^1([x_n, +\infty))$ segue che la funzione g è infinitesima (con ordine di infinitesimo maggiore di 1). Si ha, dunque,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x \cdot s(x)|}{|x \cdot g(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|\beta|e^{-x}}{|x \cdot g(x)|} = \frac{|\beta|e^{-x}}{\frac{g(x)}{\frac{1}{x}}} = 0$$

Dalla definizione di limite segue, dunque,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 \text{ t.c. } |x| > M \quad \left| \frac{xs(x)}{x \cdot g(x)} \right| < \epsilon$$

da cui,

$$\int_{x_n}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx \leq \epsilon \int_{x_n}^{+\infty} |x \cdot g(x)| dx$$

□

Per la s_{Lt} vale, infine, il seguente:

Teorema 2.13. *Sia s_{Lt} la spline della Definizione 2.7. Allora*

$$\int_{x_n}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx \leq \int_{x_n}^{+\infty} |g(x)| dx$$

per ogni g continua e reale, tale che $g \in C^1([x_n, +\infty)) \cap L^1([x_n, +\infty))$.

Dimostrazione Dall'essere $g \in L^1([x_n, +\infty))$ segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xg(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{g(x)}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$$

cioè $g(x)/x$ è infinitesimo di ordine maggiore di uno. Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x \cdot s(x)|}{|g(x)|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{|g(x)|} = 0$$

per cui

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M > 0 \text{ t.c. } |x| > M \quad \left| \frac{x \cdot s(x)}{g(x)} \right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |x \cdot s(x)| < \epsilon |g(x)|$$

dunque l'asserto. \square

Si può concludere, dunque, con il seguente:

Teorema 2.14. [Esistenza ed unicità della spline che risolve il problema di fitting di valori di una Trasformata di Laplace]

Siano assegnati i punti del piano $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, tali che

$$y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n$$

*con $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Trasformata di Laplace **incognita**, sia:*

$$sw_F(s) = \sum_{i=1}^n w_i [y_i - s(x_i)]^2 + \rho \int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx \quad (2.26)$$

con ρ costante positiva, $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, pesi assegnati e

$$K = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

dove $x_0 = \alpha_f$, ascissa di convergenza della Trasformata di Laplace e $x_{n+1} = +\infty$, sia $n \geq 2$, allora

esiste un'unica spline che soddisfa la Definizione 2.7 sull'insieme dei nodi K , tale che

$$sw_F(s_{Lt}) \leq sw_F(s), \quad \forall s \in \mathcal{F};$$

l'uguaglianza sussiste se e solo se $s_{Lt} \equiv s$ in $[x_1, +\infty)$.

Osservazione 2.3. *In effetti, se $n < 2$ esistono infinite soluzioni del problema; se $n = 2$ esiste un unico polinomio di primo grado che interpola i nodi assegnati; se $n > 2$ esiste l'unica spline generalizzata interpolante, s_{Lt} , che minimizza il funzionale (2.26).*

Dimostrazione Dimostriamo che:

1. la s_{Lt} è univocamente determinata da un sistema di n equazioni in n incognite, che descrivono le condizioni di interpolazione e regolarità dettate dalla sua stessa definizione.
 2. Tale spline è proprio quella che verifica l'asserto.
1. Dalla **Definizione 2.7**, imponiamo le condizioni:
- (a) di interpolazione nei nodi,
 - (b) s, s', s'' continue nei nodi x_2, \dots, x_{n-1} ,
 - (c) le due condizioni agli estremi: la continuità della derivata terza in x_2 , necessaria in assenza di informazioni sull'andamento della spline in $(\alpha_f, x_1]$, e la derivata prima in x_n .

I coefficienti della rappresentazione della spline generalizzata in una base fissata sono calcolati risolvendo un sistema lineare di n equazioni in n incognite⁹:

$$F\bar{\lambda} = g, \quad (2.27)$$

la cui soluzione è il vettore delle derivate prime della spline,

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T,$$

nei nodi x_1, \dots, x_n :

$$\begin{cases} h_3^2 \lambda_1 + \lambda_2 (h_3^2 - h_2^2) - h_2^2 \lambda_3 = 2(h_3^2 y[x_2, x_1] - h_2^2 y[x_3, x_2]) \\ (1 - \delta_i) \lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \delta_i \lambda_{i+1} = 3\{(1 - \delta_i) y[x_i, x_{i-1}] + \delta_i y[x_i, x_{i+1}]\} & i = 2, \dots, n-1 \\ \lambda_n = a_n \cdot k(x_n) \cdot \bar{k}(x_n) \end{cases}$$

con

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n$$

e

$$\delta_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad i = 2, \dots, n-1$$

⁹La dimostrazione è fornita nel paragrafo 2.4.1, relativo al metodo costruttivo per la spline generalizzata s_{Lt} .

La matrice dei coefficienti è, allora:

$$F = \begin{bmatrix} h_3^2 & (h_3^2 - h_2^2) & -h_2^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \delta_2 & 2 & \delta_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta_3 & 2 & \delta_3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \delta_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dimostriamo che il sistema di equazioni omogeneo associato ammette solo la soluzione banale e, quindi, che il sistema completo ammette una ed una sola soluzione. Proviamo, cioè, che il determinante della matrice F è non nullo. In effetti:

$$|F| = h_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_3^2} & -\frac{h_2^2}{h_3^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \delta_2 & 2 & \delta_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta_3 & 2 & \delta_3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \delta_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dove $h_i \neq 0$, $\forall i$, nell'ipotesi in cui i nodi siano tutti distinti. Sostituendo alla seconda riga quella che si ottiene sottraendo ad essa la prima moltiplicata per $1 - \delta_2$ si ha:

$$|F| = h_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_3^2} & -\frac{h_2^2}{h_3^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 - (1 - \delta_2) \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_3^2} & \delta_2 + (1 - \delta_2) \frac{h_2^2}{h_3^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta_3 & 2 & \delta_3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \delta_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

per il Teorema di Laplace applicato all'ultima riga si ha:

$$|F| = h_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_3^2} & -\frac{h_2^2}{h_3^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 - (1 - \delta_2) \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_3^2} & \delta_2 + (1 - \delta_2) \frac{h_2^2}{h_3^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta_3 & 2 & \delta_3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \delta_{n-1} & 2 \end{vmatrix}$$

Inoltre, per il Teorema di Laplace applicato alla prima colonna:

$$\begin{aligned} |F| &= h_3^2 \begin{vmatrix} 2 - (1 - \delta_2) \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_3^2} & \delta_2 + (1 - \delta_2) \frac{h_2^2}{h_3^2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 - \delta_3 & 2 & \delta_3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \delta_{n-1} & 2 \end{vmatrix} \\ &= h_3^2 |F'| \end{aligned}$$

Il determinante della matrice F è multiplo del determinante di F' , a meno dello scalare non nullo e positivo h_3^2 ; la matrice F' è a diagonale dominante; infatti essa lo è banalmente per le ultime $n - 3$ righe; inoltre, essendo:

$$1 - \delta_2 = 1 - \frac{h_2}{h_2 + h_3} = \frac{h_3}{h_2 + h_3}$$

l'elemento di posto $(1, 1)$ di F' è:

$$f'_{11} = 2 - (1 - \delta_2) \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_3^2} = 2 - \frac{h_3}{h_2 + h_3} \cdot \frac{h_3^2 - h_2^2}{h_3^2} = 2 - \frac{h_3 - h_2}{h_3} = 2 - 1 + \frac{h_2}{h_3}$$

mentre

$$f'_{12} = \delta_2 + (1 - \delta_2) \cdot \frac{h_2^2}{h_3^2} = \frac{h_2}{h_2 + h_3} + \frac{h_3}{h_2 + h_3} \cdot \frac{h_2^2}{h_3^2}$$

cioè

$$f'_{12} = \frac{h_2}{h_2 + h_3} + \frac{h_2^2}{h_3(h_2 + h_3)} = \frac{h_2}{h_3}$$

dunque,

$$f'_{11} = 1 + \frac{h_2}{h_3} > f'_{12} = \frac{h_2}{h_3}$$

La matrice F' è, allora *a diagonale dominante*. Il suo determinante è uguale al

prodotto degli autovalori e, per il teorema di Gershgorin ¹⁰ gli autovalori di F' cadono tutti nell'unione dei dischi:

$$D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{n-2}$$

con

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - f'_{11}| \leq f'_{12}\}$$

cerchio chiuso di centro f'_{11} e raggio $f'_{12} < f'_{11}$,

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1\}, \quad i = 2, \dots, n-3,$$

cerchio chiuso di centro 2 e raggio 1 e

$$D_{n-2} = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 1 - \delta_{n-1} < 1\}.$$

Essi risultano, dunque, tutti diversi da zero, per cui è

$$|F| = h_3^2 |F'| \neq 0$$

cioè, **qualunque sia la distribuzione dei nodi di K , esiste una ed una sola soluzione del sistema (2.27). La spline s_{Lt} è unica.**

2. Per definizione $s_{Lt} \in \mathcal{F}$; essa è, inoltre, interpolante, per cui annulla il primo termine del funzionale e, per il **Teorema 2.13**, minimizza anche il secondo termine. L'unicità segue banalmente perché, se esistesse un'altra $\tilde{s} \in \mathcal{F}$, tale che sia minimo il funzionale sw_F , sarebbe $sw_F(\tilde{s}) \leq sw_F(s)$, per ogni $s \in \mathcal{F}$. In particolare, $s_{Lt} \in \mathcal{F}$, dunque $sw_F(\tilde{s}) \leq sw_F(s_{Lt})$. Ma, per il **Teorema 2.13**, sarebbe $sw_F(s_{Lt}) \leq sw_F(\tilde{s})$, da cui l'uguaglianza dei minimi $sw_F(\tilde{s}) = sw_F(s_{Lt})$. Ma questa è vera se e solo se $\tilde{s} \equiv s_{Lt}$. In effetti, se $sw_F(\tilde{s}) = sw_F(s_{Lt})$, per definizione:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sum_{i=1}^n w_i [y_i - s_{Lt}(x_i)]^2}_{=0} + \rho \int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot s_{Lt}(x)| dx = \\ &= \sum_{i=1}^n w_i [y_i - \tilde{s}(x_i)]^2 + \rho \int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot \tilde{s}(x)| dx > \\ &> \rho \int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot \tilde{s}(x)| dx \end{aligned}$$

ma, per il **Teorema 2.13** questo è un assurdo. Il viceversa è banale.

□

¹⁰

Teorema 2.15. [Teorema di Gershgorin]

Lo spettro di una matrice A , $n \times n$, è contenuto nell'unione dei seguenti n dischi, D_i , nel piano complesso:

$$D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|\} \quad 1 \leq i \leq n$$

Definita, allora, la rappresentazione della spline approssimante in tutto $[x_1, +\infty)$, e dimostrato che essa minimizza il funzionale sw_F , costruiamo s_{Lt} calcolando i coefficienti della sua rappresentazione in una opportuna base.

2.4 Costruzione della spline generalizzata: calcolo dei coefficienti

In questo paragrafo, seguendo [29] proponiamo un metodo costruttivo per la spline generalizzata s_{Lt} della **Definizione 2.7**. A proposito della spline polinomiale s_1 , che ne rappresenta la restrizione in $[x_1, x_n]$, è stato scelto che fosse cubica essendo noto, infatti, quanto le **spline cubiche garantiscano**, in generale, **il giusto compromesso tra accuratezza ed efficienza**. In effetti le espressioni del funzionale e della spline che lo minimizza si possono generalizzare introducendo, nella definizione di \mathcal{F} , lo spazio $S_m(K)$ delle spline di grado m sull'insieme dei nodi K . Tuttavia, sebbene le spline polinomiali forniscano una maggiore accuratezza, al crescere del loro grado, aumentare il grado della spline significa aumentare anche, in relazione alla rappresentazione dei polinomi

$$s_{Lt}(x) = p_i(x) \in \Pi_m, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1$$

il numero dei coefficienti incogniti da calcolare, dunque la complessità di tempo richiesta dall'algoritmo per il metodo costruttivo di s_{Lt} .

Partendo dalla definizione di $s_1 \in C^2((-\infty, +\infty))$ e $s_2 \in C^\infty(\mathbb{R}/\{0\})$, un metodo computazionalmente efficiente per il calcolo dei coefficienti di s_{Lt} si realizza *costruendo la spline generalizzata intervallo per intervallo* ed imponendo per essa le condizioni di interpolazione:

$$s(x_i) = y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

nonché quelle di continuità della funzione spline e delle sue derivate nei nodi,

dettate dalla sua stessa definizione. La soluzione al problema di interpolazione mediante spline è resa unica attraverso opportuni vincoli imposti nei nodi estremi.

2.4.1 Formulazione del metodo costruttivo

Siano assegnati n nodi ed i valori corrispondenti: $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$; per costruire la spline approssimante della **Definizione 2.7**, consideriamo la rappresentazione di ciascuna delle funzioni che la costituiscono, intervallo per intervallo¹¹. In particolare, negli intervalli

$$[x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

la spline è polinomiale per cui si può rappresentare come un polinomio di grado al più tre. A partire da un metodo costruttivo noto [27], per il calcolo dei coefficienti della *spline cubica naturale interpolante* un insieme di nodi

$$K = \{x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}\},$$

dove

$$x_0 = -\infty \quad \text{e} \quad x_{n+1} = +\infty,$$

rappresentiamo, $s = s_{Lt}$ in ciascun $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, \dots, n$, ponendo un **problema di interpolazione di tipo Hermite**. Il polinomio di Hermite, interpolante i nodi x_{i-1} e x_i , espresso mediante formula di Newton è:

$$\begin{aligned} s(x) \equiv p_{i-1}(x) &= y[x_{i-1}] + \lambda_{i-1}(x - x_{i-1}) + y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i](x - x_{i-1})^2 + \\ &+ y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i](x - x_{i-1})^2(x - x_i) \in \Pi_3 \\ x &\in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 2, \dots, n \end{aligned}$$

¹¹Esiste una motivazione strettamente computazionale nella scelta di costruire la spline intervallo per intervallo. Infatti, si può dimostrare che una funzione spline, su tutto il suo dominio di definizione, ammette una rappresentazione univoca in una opportuna base di funzioni. In tal caso, determinare la spline equivale a determinarne i coefficienti nella base. Purtroppo il sistema lineare a cui tale rappresentazione conduce è di tipo Vandermonde, quindi fortemente mal condizionato. È necessario, pertanto, derivare un metodo costruttivo alternativo, come quello che utilizza l'informazione che la spline in ogni sottointervallo sia rappresentata da un polinomio [29].

dove abbiamo posto:

$$\begin{aligned}\lambda_i &= p'_i(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \lambda_n &= p'_{n-1}(x_n)\end{aligned}$$

I coefficienti di p_{i-1} sono, dunque:

- $a_{i-1} = y[x_{i-1}] = y_{i-1}$, quantità nota perché x_{i-1} è un nodo di interpolazione;
- $b_{i-1} = \lambda_{i-1} = y[x_{i-1}, x_{i-1}]$, incognita da determinare;
- $c_{i-1} = y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] = \frac{y[x_{i-1}, x_{i-1}] - y[x_{i-1}, x_i]}{x_{i-1} - x_i} = \frac{\lambda_{i-1} - y[x_{i-1}, x_i]}{x_{i-1} - x_i}$, quantità calcolabile se noti i λ_i , $i = 1, \dots, n$;
- $d_{i-1} = y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i, x_i] = \frac{y[x_{i-1}, x_{i-1}, x_i] - y[x_{i-1}, x_i, x_i]}{x_{i-1} - x_i} = \frac{-y[x_{i-1}, x_i] + \lambda_{i-1}}{(x_{i-1} - x_i)^2} - \frac{y[x_{i-1}, x_i] - \lambda_i}{(x_{i-1} - x_i)^2}$, quantità calcolabile se noti i λ_i , $i = 1, \dots, n$.

In definitiva, i coefficienti di ciascun p_{i-1} sono tutti riconducibili alle quantità λ_i , $i = 1, \dots, n$. La restrizione della spline all'intervallo $[x_n, +\infty)$ è la funzione

$$s_2(x) = a_n \frac{e^{-x}}{x}.$$

Per costruire la funzione spline in tutto $[x_1, +\infty)$, bisogna, allora, determinare i quattro coefficienti a_i, b_i, c_i, d_i , $i = 1, \dots, n-1$, in ciascun sottointervallo tra i nodi, ai quali bisogna aggiungere il coefficiente a_n . Occorre calcolare, dunque, $4 \cdot (n-1) + 1 = 4n - 3$ coefficienti.

Descrizione del metodo

In base alla definizione, la spline cubica s_1 , interpolante gli n nodi, deve essere continua, insieme con le sue derivate prima e seconda, in $(x_1, +\infty)$. Soddisfiamo questa richiesta sulla funzione imponendo:

- 1) $n-2$ condizioni di *regolarità* per s in x_i , $i = 2, \dots, n-1$:

$$p_{i-1}(x_i) = p_i(x_i), \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (2.28)$$

2) $n-2$ condizioni di *regolarità* per s' in $x_i, i = 2, \dots, n-1$:

$$\frac{d}{dx}p_{i-1}(x_i) = \frac{d}{dx}p_i(x_i), \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (2.29)$$

3) $n-2$ condizioni di *regolarità* per s'' in $x_i, i = 2, \dots, n-1$:

$$\frac{d^2}{dx^2}p_{i-1}(x_i) = \frac{d^2}{dx^2}p_i(x_i), \quad i = 2, \dots, n-1 \quad (2.30)$$

Infine, affinché s interpoli i punti assegnati, occorre imporre:

4) n condizioni di interpolazione:

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n \rightarrow \begin{cases} p_1(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ p_{n-1}(x_{n-1}) = y_{n-1} \\ s_2(x_n) = y_n \end{cases} \quad (2.31)$$

Imponendo le condizioni (2.28, 2.29, 2.30, 2.31), si individuano $3 \cdot (n-2) + n = 4n - 6$ condizioni, alle quali bisogna aggiungere tre condizioni che garantiscano l'unicità della soluzione. La scelta più naturale, nella definizione del modello, sembrerebbe quella di imporre le condizioni di **continuità della spline, con le sue derivate prime e seconde, in x_n** , in modo da ottenere una spline complessivamente $C^2((x_1, +\infty))$. In effetti, attraverso le esperienze numeriche, è stato verificato che la scelta delle condizioni al contorno incide notevolmente, oltre che sull'andamento della funzione in $(\alpha_f, x_1]$ e $[x_n, +\infty)$, anche sul condizionamento della matrice dei coefficienti del sistema lineare cui si perviene imponendo le $4n - 3$ condizioni descritte. La fase di testing relativa alla *definizione del modello*, è stata, allora, caratterizzata dalla scelta, che fosse anche computazionalmente più vantaggiosa, delle condizioni da imporre sulla spline nei nodi estremi. In tutti i casi è stata richiesta **la continuità della spline in x_n** . Relativamente alle altre due condizioni necessarie per raggiungere l'unicità della funzione spline, una prima idea è stata quella di richiedere la **continuità della derivata terza in x_2 e della derivata terza in x_{n-1}** ¹². Con queste scelte si riesce

¹²Le condizioni di continuità della derivata terza in x_2 ed in x_{n-1} sono dette condizioni *not-a-knot* in tali nodi; esse vincolano ad essere, rispettivamente, $p_1 = p_2$ e $p_{n-2} = p_{n-1}$; ad esse si ricorre nei metodi costruttivi per spline interpolanti, in assenza di informazioni

a rendere la matrice dei coefficienti del sistema risultante meglio condizionata, anche al crescere del numero dei nodi di costruzione, rispetto alla richiesta $s \in C^2((x_1, +\infty))$. Tuttavia, realizzando un compromesso tra quest'ultimo vantaggio ed una **maggiore regolarità in x_n** , punto di raccordo tra s_1 e s_2 , è stato definito che le condizioni aggiuntive fossero quelle della definizione di s_{Lt} :

- la **continuità della spline e della sua derivata prima nel nodo x_n** ;
- la **continuità della derivata terza nel nodo x_2** .

In effetti quest'ultima condizione è comprensibile, non avendo, altrimenti, informazioni sull'andamento della funzione a sinistra del primo nodo di costruzione.

Con questi vincoli sull'andamento della spline sono stati ottenuti risultati di approssimazione soddisfacenti, come illustrato nel paragrafo ad essi relativo.

Imponendo, allora, le condizioni di regolarità sulla funzione spline ed i vincoli scelti, costruiamo il sistema la cui soluzione sarà il vettore delle derivate prime della spline nei nodi. Il calcolo dei λ_i , $i = 1, \dots, n$ ci consentirà di determinare la rappresentazione della spline intervallo per intervallo ed in tutto $[x_1, +\infty)$.

Sfruttiamo, a tal fine, la seguente [29]:

Proposizione 2.3. *Siano ξ ed η due numeri reali, distinti. Sia $p \in \Pi_3$. Allora:*

$$p''(\xi) = \frac{2}{\xi - \eta} \{2p'(\xi) + p'(\eta) - 3y[\xi, \eta]\}$$

Applichiamo la proposizione precedente al polinomio p_{i-1} , avendo scelto

$$\xi = x_i \quad \text{e} \quad \eta = x_{i-1}.$$

Si ha:

$$s''(x_i) = p''_{i-1}(x_i) = \frac{2}{h_i} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} \quad i = 2, \dots, n$$

sulla derivata prima nei nodi estremi.

avendo posto:

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n$$

Applicando, di nuovo, la **Proposizione 2.3**, con $\xi = x_i$ e $\eta = x_{i+1}$, si ha:

$$s''(x_i) = p_i''(x_i) = \frac{-2}{h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} \quad i = 1, \dots, n-1$$

Osserviamo che le condizioni di interpolazione in x_{i-1} e x_i , per $i = 2, \dots, n$, sono sottintese nella definizione stessa di polinomio di Hermite interpolante $[x_{i-1}, x_i]$; inoltre, ponendo $p'_{i-1}(x_i) = \lambda_i$ (oltre che $p'_{i-1}(x_{i-1}) = \lambda_{i-1}$), imponiamo, implicitamente, anche la continuità della derivata prima, essendo, per definizione, $\lambda_i = p'_i(x_i)$.

Affinché s sia C^2 in x_2, \dots, x_{n-1} , ci basta, allora, imporre che le derivate seconde siano continue nei nodi di raccordo, cioè:

$$p''_{i-1}(x_i) = p_i''(x_i), \quad i = 2, \dots, n-1$$

ovvero:

$$\frac{2}{h_i} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} + \frac{2}{h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} = 0$$

da cui segue:

$$\frac{h_{i+1}}{h_i \cdot h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i-1} - 3y[x_i, x_{i-1}]\} + \frac{h_i}{h_i \cdot h_{i+1}} \{2\lambda_i + \lambda_{i+1} - 3y[x_i, x_{i+1}]\} = 0 \quad (2.32)$$

Posto:

$$\delta_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad i = 2, \dots, n-1$$

e moltiplicando la (2.32) per

$$\frac{h_i \cdot h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

si ha:

$$(1 - \delta_i)\lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \delta_i\lambda_{i+1} = 3\{(1 - \delta_i)y[x_i, x_{i-1}] + \delta_i y[x_i, x_{i+1}]\} \\ i = 2, \dots, n-1 \quad (2.33)$$

Si è ottenuto un sistema di $n - 2$ equazioni in n incognite, $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Essendo il numero di incognite strettamente maggiore del numero di equazioni, possono esistere infinite soluzioni.

Imponiamo, dunque, le condizioni aggiuntive che particolarizzano la spline rendendola unica:

$$p_{n-1}(x_n) = s_2(x_n) \quad (2.34)$$

$$p'_{n-1}(x_n) = s'_2(x_n) \quad (2.35)$$

$$p'''_1(x_2) = p'''_2(x_2) \quad (2.36)$$

Se $p_n(x) = s_2(x)$, possiamo esprimere p_n e le sue derivate come:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_n \frac{e^{-x}}{x} = a_n \cdot k(x) \\ \frac{d}{dx} p_n(x) &= a_n \left(\frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} \right) = \\ &= \left(a_n \frac{e^{-x}}{x} \right) \left(\frac{-(x+1)}{x} \right) = \\ &= p_n(x) \cdot \left(\frac{-(x+1)}{x} \right) = \\ &= p_n(x) \cdot \bar{k}(x) = a_n \cdot k(x) \cdot \bar{k}(x) \\ \frac{d^2}{dx^2} p_n(x) &= \frac{d}{dx} p_n(x) \cdot \bar{k}(x) + p_n(x) \left(\frac{-x + (x+1)}{x^2} \right) = \\ &= p_n(x) \cdot \bar{k}(x) \cdot \bar{k}(x) + p_n(x) \left(\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= a_n \cdot k(x) \cdot \bar{k}^2(x) + a_n \cdot k(x) \cdot \bar{\bar{k}}(x) = \\ &= a_n \cdot k(x) \cdot [\bar{k}^2(x) + \bar{\bar{k}}(x)] \end{aligned}$$

dove, per semplicità di notazione, abbiamo posto

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{e^{-x}}{x}, \\ \bar{k}(x) &= \frac{-(x+1)}{x} \\ \bar{\bar{k}}(x) &= \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

La (2.34) segue dalla definizione stessa della spline interpolante, per cui:

$$a_n = y_n \cdot x_n \cdot e^{x_n}$$

La (2.35) è anch'essa banale essendo, per definizione:

$$\lambda_n = a_n \cdot k(x_n) \cdot \bar{k}(x_n) \quad (2.37)$$

Per esplicitare la condizione (2.36) dimostriamo la seguente:

Proposizione 2.4. *Siano ξ ed η due numeri reali, distinti. Sia $p \in \Pi_3$ e d il coefficiente del termine di grado massimo:*

$$p'''(x) = d = \text{costante}$$

Allora:

$$d = \frac{6}{(\xi - \eta)^2} \{p'(\eta) + p'(\xi) - 2[\xi, \eta]\}$$

Dimostrazione Scriviamo il polinomio di Taylor di p di punto iniziale η , valutato in ξ :

$$p(\xi) = p(\eta) + p'(\eta)(\xi - \eta) + p''(\eta) \frac{(\xi - \eta)^2}{2} + d \cdot \frac{(\xi - \eta)^3}{6} \quad (d = \text{costante})$$

Allo stesso modo, scriviamo il polinomio di Taylor di p'' di punto iniziale ξ , valutato in η :

$$p''(\eta) = p''(\xi) + (\eta - \xi) \cdot d$$

Sostituendo $p''(\eta)$ nell'espressione del polinomio di Taylor di p segue:

$$y[\xi, \eta] = \frac{p(\xi) - p(\eta)}{\xi - \eta} = p'(\eta) + p''(\xi) \frac{(\xi - \eta)}{2} - d \cdot \frac{(\eta - \xi)^2}{2} + d \cdot \frac{(\xi - \eta)^2}{6}$$

Da cui,

$$y[\xi, \eta] = p'(\eta) + p''(\xi) \frac{(\xi - \eta)}{2} - 2d \cdot \frac{(\xi - \eta)^2}{6} \quad (2.38)$$

Ricavando $p''(\xi)$, si ottiene:

$$p''(\xi) = \frac{2}{(\xi - \eta)} \left\{ y[\xi, \eta] - p'(\eta) + \frac{1}{3}d \cdot (\xi - \eta)^2 \right\}$$

Invertendo i ruoli di ξ e η si ha anche:

$$p(\eta) = p(\xi) + p'(\xi)(\eta - \xi) + p''(\xi) \frac{(\eta - \xi)^2}{2} + d \cdot \frac{(\eta - \xi)^3}{6}$$

da cui

$$y[\xi, \eta] = \frac{p(\eta) - p(\xi)}{\eta - \xi} = p'(\xi) + p''(\xi) \frac{(\eta - \xi)}{2} + d \cdot \frac{(\eta - \xi)^2}{6}$$

e, quindi,

$$p''(\xi) = \frac{2}{(\eta - \xi)} \left\{ y[\xi, \eta] - p'(\xi) - d \cdot \frac{(\eta - \xi)^2}{6} \right\}$$

Sostituendo $p''(\xi)$ nella (2.38) si trova:

$$y[\xi, \eta] = p'(\eta) + \frac{2}{(\eta - \xi)} \left\{ y[\xi, \eta] - p'(\xi) - d \cdot \frac{(\eta - \xi)^2}{6} \right\} \frac{(\xi - \eta)}{2} - 2d \cdot \frac{(\xi - \eta)^2}{6}$$

da cui:

$$y[\xi, \eta] - p'(\eta) + y[\xi, \eta] - p'(\xi) = d \cdot \frac{(\xi - \eta)^2}{6} - 2d \cdot \frac{(\xi - \eta)^2}{6}$$

e, quindi l'asserto:

$$d = \frac{-6}{(\xi - \eta)^2} \{2y[\xi, \eta] - p'(\eta) - p'(\xi)\}$$

□

Essendo, allora, p_1 e p_2 due polinomi di terzo grado, applicando la **Proposizione 2.4** a p_1 , con con

$$p_1'''(x) = d_1, \quad \xi = x_2 \quad \text{e} \quad \eta = x_1,$$

ed a p_2 con

$$p_2'''(x) = d_2, \quad \xi = x_3 \quad \text{e} \quad \eta = x_2,$$

ed imponendo la (2.36), si trova:

$$\begin{aligned} p_1'''(x_2) = p_2'''(x_2) &\Rightarrow d_1 = d_2 \\ &\Rightarrow -\frac{6}{h_2^2} \{2y[x_2, x_1] - \lambda_1 - \lambda_2\} = -\frac{6}{h_3^2} \{2y[x_3, x_2] - \lambda_2 - \lambda_3\} \end{aligned}$$

da cui:

$$h_3^2 \lambda_1 + \lambda_2 (h_3^2 - h_2^2) - h_2^2 \lambda_3 = 2(h_3^2 y[x_2, x_1] - h_2^2 y[x_3, x_2]) \quad (2.39)$$

Aggiungendo, dunque, le equazioni (2.37) e (2.39) al sistema (2.33) si ottiene un **sistema di n equazioni in n incognite**, che indicheremo con

$$F\bar{\lambda} = g, \quad (2.40)$$

la cui soluzione è il vettore delle derivate prime della spline,

$$\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T,$$

nei nodi x_1, \dots, x_n :

$$\begin{cases} h_3^2 \lambda_1 + \lambda_2(h_3^2 - h_2^2) - h_2^2 \lambda_3 = 2(h_3^2 y[x_2, x_1] - h_2^2 y[x_3, x_2]) \\ (1 - \delta_i) \lambda_{i-1} + 2\lambda_i + \delta_i \lambda_{i+1} = 3\{(1 - \delta_i) y[x_i, x_{i-1}] + \delta_i y[x_i, x_{i+1}]\} \\ \lambda_n = a_n \cdot k(x_n) \cdot \bar{k}(x_n) \end{cases}$$

con $i = 2, \dots, n-1$. La matrice dei coefficienti è, allora:

$$F = \begin{bmatrix} h_3^2 & (h_3^2 - h_2^2) & -h_2^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \delta_2 & 2 & \delta_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta_3 & 2 & \delta_3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \delta_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a banda¹³ con ampiezza di banda superiore 2 ed inferiore 1; il vettore dei termini noti è:

$$g = \begin{pmatrix} 2(h_3^2 y[x_2, x_1] - h_2^2 y[x_3, x_2]) \\ 3\{(1 - \delta_2)y[x_2, x_1] + \delta_2 y[x_2, x_3]\} \\ 3\{(1 - \delta_3)y[x_3, x_2] + \delta_3 y[x_3, x_4]\} \\ \vdots \\ a_n \cdot k(x_n) \cdot \bar{k}(x_n) \end{pmatrix}$$

Abbiamo già provato che il determinante di F è non nullo, qualunque sia la distribuzione dei nodi, nell'ipotesi in cui questi ultimi siano tutti distinti; dunque il sistema ammette un'unica soluzione.

Risolto il sistema, si determinano i coefficienti del polinomio che rappresenta la spline generalizzata $s = s_1 + s_2$, in ciascun intervallo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$ ed in $[x_n, +\infty)$; in particolare, se in $[x_i, x_{i+1}]$ si sceglie di rappresentare il polinomio di terzo grado attraverso la formula di Newton per il polinomio interpolante di Hermite:

$$\begin{aligned} p_i(x) &= a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^2(x - x_{i+1}) \\ a_i &= y[x_i] \\ b_i &= \lambda_i = y[x_i, x_i] \\ c_i &= y[x_i, x_i, x_{i+1}] \\ d_i &= y[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}] \end{aligned}$$

la valutazione della spline in un punto

$$\tilde{x} \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1,$$

13

Definizione 2.8. (Matrice a banda)

Una matrice $A = (a_{i,j})$ si dice a banda, con ampiezza di banda inferiore p ed ampiezza di banda superiore q , se

$$a_{i,j} = 0 \text{ per } i > j + p \text{ e per } j > i + q.$$

si realizza applicando l'algoritmo di Horner al polinomio p_i . Infine, se $\tilde{x} \in [x_n, +\infty)$, si valuta la funzione

$$s_2(x) = a_n \frac{e^{-x}}{x}, \quad \text{con} \quad a_n = y_n \cdot x_n \cdot e^{x_n}$$

Riepilogando quanto detto, il procedimento per la costruzione e valutazione in un fissato punto \tilde{x} della funzione spline definita sull'insieme di punti assegnati $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n$, consiste in:

- Passo 1):** costruzione della matrice F e del vettore g ;
- Passo 2):** risoluzione del sistema con matrice a banda $F\bar{\lambda} = g$;
- Passo 3):** determinazione dell'intervallo, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$,
oppure $[x_n, +\infty)$, a cui \tilde{x} appartiene;
- Passo 4):** calcolo dei coefficienti a_i, b_i, c_i, d_i , oppure a_n ;
- Passo 5):** valutazione in \tilde{x} .

L'algoritmo in pseudo-codice *pascal-like*, per la costruzione e la valutazione della spline interpolante, secondo il metodo descritto, è il seguente:

```

procedure Spline_Int(in:  $n, x, y, \tilde{x}$ , out:  $s$ )

  /# SCOPO: valutazione, in un fissato punto, della spline
      interpolante, costruita su un insieme di punti assegnati

  /# SPECIFICHE DEI PARAMETRI:

  /# PARAMETRI DI INPUT:

  var:  $n$       : intero          { numero dei punti di }
                                   { interpolazione }

  var:  $x(n)$    : array di reali { nodi di interpolazione }

  var:  $y(n)$    : array di reali { ordinate corrispondenti }
                                   { ai nodi di interpolazione }

  var:  $\tilde{x}$     : reale          { punto di valutazione }
                                   { della spline }

  /# PARAMETRI DI OUTPUT:

  var:  $s$       : reale          { valore della spline in  $\tilde{x}$  }

  /# INIZIO ISTRUZIONI:

  begin Spline_Int

  call Ordinamento( $n, x, y$ )      { ordinamento dei nodi  $x_i$  e }
                                   { dei valori corrispondenti  $y_i$  }

  call Coeff_F( $n, x, F$ )          { costruzione della matrice  $F$  }

  call Coeff_g( $n, x, y, ksgn, k2sgn, g$ ) { costruzione del vettore  $g$  }

```

Procedura 2.1: Algoritmo per la costruzione e valutazione della spline
generalizzata interpolante

call LU(n, F, L, U)	{ algoritmo di fattorizzazione }
	{ LU con pivoting per }
	{ matrice a banda applicato a F }
call Forw_sub(n, L, y, g)	{ risoluzione del sistema }
	{ triangolare inferiore }
call Back_sub($n, U, \bar{\lambda}, y$)	{ risoluzione del sistema }
	{ triangolare superiore }
call Ric_Bin(n, x, \tilde{x}, i)	{ determinazione }
	{ dell'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ }
	{ a cui \tilde{x} appartiene }
if ($i \neq n$) then	
call Coeff_Spline($x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}, \bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_{i+1},$ a_i, b_i, c_i, d_i)	{ calcolo dei coefficienti }
	{ a_i, b_i, c_i, d_i }
call Horner_Spline($x_i, \tilde{x}, a_i, b_i, c_i, d_i, s, n$)	{ s è la valutazione della }
	{ spline in \tilde{x} }
else	
$a_n := y_n \cdot x_n \cdot \exp(x_n)$	{ calcolo del coefficiente a_n }
$s := a_n \cdot \exp(-\tilde{x})/\tilde{x}$	{ s è la valutazione della }
	{ spline in \tilde{x} }
endif	
end Spline_Int	

Procedura 2.1: Algoritmo per la costruzione e valutazione della spline
generalizzata interpolante

In particolare:

Ordinamento(n, x, y) ordina i nodi x_i ed i valori corrispondenti y_i ;

$\text{Coeff_}F(n, x, F)$, riceve, in input n ed il vettore x dei nodi, necessario per il calcolo degli h_i e, dunque, dei $\delta_i, \forall i$; in output restituisce la matrice F ;

$\text{Coeff_}g(n, x, y, ksgn, k2sgn, g)$, riceve, in input, n , i vettori x e y , ed i valori, opportunamente calcolati di $ksgn = \bar{k}(x_n)$ e $k2sgn = \bar{\bar{k}}(x_n)$ (in alternativa possono essere output se calcolati all'interno della procedura); in output restituirà il vettore dei termini noti, g ;

$\text{LU}(n, F, L, U)$ algoritmo di fattorizzazione LU *con pivoting parziale* specifico per matrice a banda, applicato a F ;

$\text{Forw_sub}(n, L, y, g)$ algoritmo di *forward substitution* per la risoluzione del sistema triangolare inferiore $Ly = g$;

$\text{Back_sub}(n, U, \bar{\lambda}, y)$ algoritmo di *back substitution* per la risoluzione del sistema triangolare superiore $U\bar{\lambda} = y$;

nella procedura $\text{Ric_Bin}(n, x, \tilde{x}, i)$ si effettua la ricerca dell'intervallo di appartenenza del punto in cui valutare la spline;

la procedura $\text{Coeff_Spline}(x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}, \bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_{i+1}, a_i, b_i, c_i, d_i)$ esegue il calcolo dei coefficienti a_i, b_i, c_i, d_i ; in alternativa, se il punto in cui valutare la spline cade nell'intervallo $[x_n, +\infty)$, basta calcolare il coefficiente a_n :

$$a_n = y_n \cdot x_n \cdot \exp(x_n)$$

$\text{Horner_Spline}(x_i, \tilde{x}, a_i, b_i, c_i, d_i, s, n)$ esegue la valutazione, mediante algoritmo di Horner, della spline nel punto desiderato; in output, s è la valutazione della spline in \tilde{x} . Se il punto in cui valutare la spline cade nell'intervallo $[x_n, +\infty)$, allora

$$s = a_n \cdot \exp(-\tilde{x})/\tilde{x}.$$

Stimiamo, infine, la complessità di tempo asintotica, e quindi l'*efficienza*, dell'algoritmo per la costruzione e valutazione della spline **generalizzata** $s_{Lt} = s_1 + s_2$, interpolante un insieme di nodi assegnati; in particolare, contiamo, dapprima, il numero di operazioni richieste dalla risoluzione del sistema, con matrice a banda, realizzata mediante fattorizzazione LU con

pivoting parziale, seguita da *forward substitution* e *back substitution*; utilizzando algoritmi specifici in relazione alla struttura della matrice, la complessità di tempo, dipendente oltre che dalla dimensione della matrice, anche dalle ampiezze di banda, inferiore $p = 1$ e superiore $q = 2$, è:

$$T_{LU\text{banda}+piv}(n, p, q) = \mathcal{O}(np(p + q + 1)) = \mathcal{O}(4n) \text{ flop}$$

mentre:

$$T_{Forw\text{Banda}+piv}(n, p) = \mathcal{O}(np) = \mathcal{O}(n) \text{ flop}$$

e

$$T_{Back\text{Banda}+piv}(n, p, q) = \mathcal{O}(n(p + q)) = \mathcal{O}(3n) \text{ flop}$$

Si ha, dunque, stimando il numero di operazioni floating point coinvolte da ciascuna procedura, nonché il numero di confronti necessari per la ricerca binaria dell'intervallo di appartenenza del punto di valutazione:

- risoluzione di un sistema a banda	$\Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n) \text{ flop}$
- ricerca binaria dell'intervallo di appartenenza del punto di valutazione	$\Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(\log_2 n) \text{ confronti}$
- costruzione del polinomio interpolante	$\Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n^2) \text{ flop}$
oppure calcolo di a_n	$\Rightarrow T(n) = (2 + \theta) \text{ flop}$
- valutazione (algoritmo di Horner)	
di un polinomio di terzo grado	$\Rightarrow T(n) = \mathcal{O}(n) \text{ flop}$
oppure di $s_2(\tilde{x}) = a_n \cdot e^{-\tilde{x}}/\tilde{x}$	$\Rightarrow T(n) = (2 + \theta) \text{ flop}$

dove θ è la complessità di tempo necessaria per la valutazione della funzione elementare $\exp(\cdot)$ (*built-in* dei compilatori di linguaggi di programmazione ad alto livello).

Segue un esempio di costruzione e valutazione della spline generalizzata, mediante il metodo descritto. Si osserva, in esso, che la matrice dei coefficienti con cui si rappresenta il metodo descritto risulta *ben condizionata* (Fig. 2.5), anche al crescere del numero dei nodi di costruzione.

♣ **Esempio 2.4.1.** Sia assegnato l'insieme dei nodi (Fig. 2.1)

$$x = [2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5, 10.5, 11.5]$$

e dei valori corrispondenti:

$$y_i = F(x_i), \quad i = 1, \dots, 10 \quad \text{con} \quad F = 1/(s - 1)$$

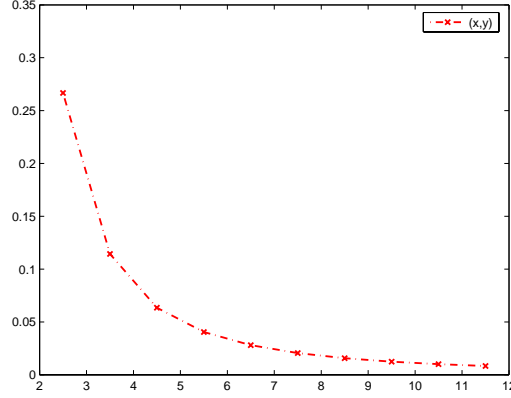


Figura 2.1: **Dati** $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, 10}$

Costruiamo la spline $s = s_1 + s_2$ implementando l'algoritmo per il metodo descritto; in Fig.2.2-2.3 si riporta la curva ottenuta e l'andamento della Trasformata di Laplace, entrambe valutate sull'insieme:

$$\begin{aligned} xx = & [2.5, 3., 3.5, 4., 4.5, 5., 5.5, 6., 6.5, 7., \\ & 7.5, 8.0000, 8.5, 9., 9.5, 10., 10.5, 11., 11.5, 12., \\ & 12.5, 13., 13.5, 14., 14.5, 15., 15.5, 16., 16.5, 17., \\ & 17.5, 18., 18.5, 19., 19.5, 20., 20.5, 21., 21.5] \end{aligned} \quad (2.41)$$

In Fig. 2.4 è tracciata la curva dell'errore assoluto commesso nell'approssimazione di F con s_{Lt} . I valori numerici dell'indice di condizionamento di F , costruita sull'insieme dei nodi x , per alcuni valori della dimensione n , sono descritti in Fig. 2.5.

♣

Per apprezzare il vantaggio computazionale offerto da metodo proposto, in relazione al condizionamento della matrice risultante dalla scelta delle condizioni al contorno, riportiamo, sottoforma di esempio, una formulazione alternativa per il metodo costruttivo.

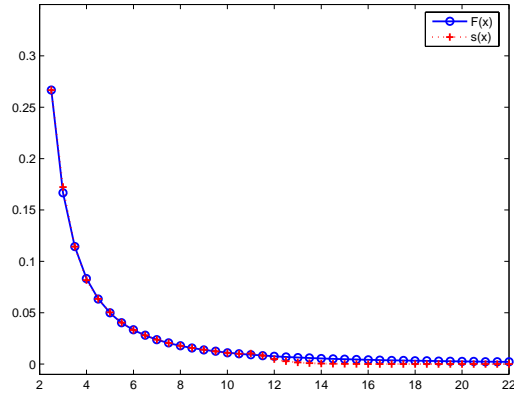


Figura 2.2: **Spline costruita imponendo $s_{Lt} \in C^1((x_1, +\infty))$ e s''' continua in x_2**

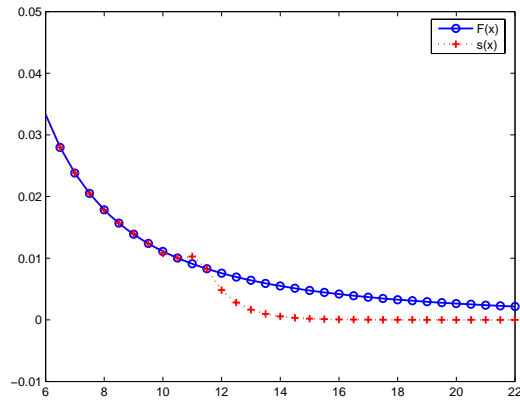


Figura 2.3: **Spline costruita imponendo $s_{Lt} \in C^1((x_1, +\infty))$ e s''' continua in x_2 : dettaglio sul punto di raccordo $x_n = 11.5$**

Poniamo l'attenzione su quanto, la scelta delle condizioni al contorno, non solo incide sull'andamento della funzione spline all'esterno dell'intervallo individuato dai nodi di costruzione, ma anche sul condizionamento della matrice dei coefficienti del sistema con cui si descrive il problema, e, quindi, sull'attendibilità dei risultati di approssimazione forniti dal metodo implementato.

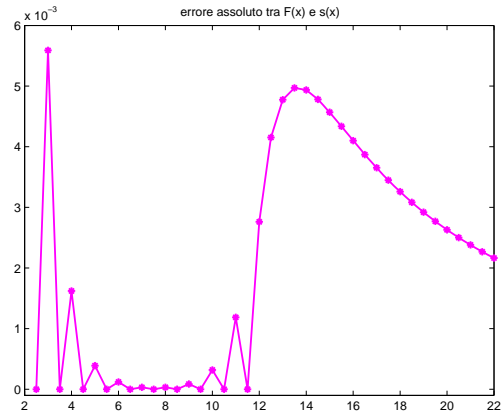


Figura 2.4: **Errore assoluto puntuale** $|F(x_i) - s(x_i)|$, $i = 1, \dots, n$

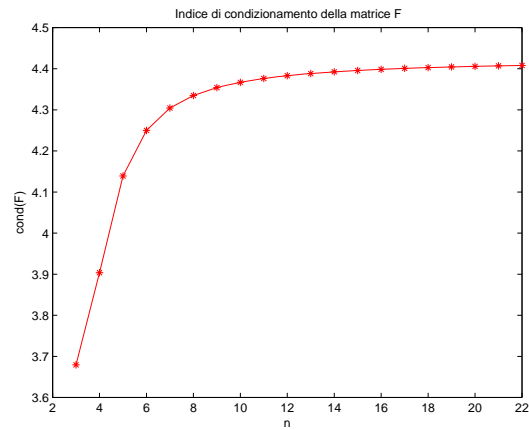


Figura 2.5: **Indice di condizionamento di F , al variare della dimensione**

♣ **Esempio 2.4.2.** A partire dal sistema (2.33), di $n - 2$ equazioni in n incognite, particolarizziamo la spline imponendo le condizioni al contorno seguenti:

- la **continuità della spline** in x_n ;
- la **continuità della sua derivata prima** in x_n ;
- la **continuità della sua derivata seconda** in x_n ;

condizioni che si traducono nelle equazioni:

$$p_{n-1}(x_n) = s_2(x_n) \quad (2.42)$$

$$p'_{n-1}(x_n) = s'_2(x_n) \quad (2.43)$$

$$p''_{n-1}(x_n) = s''_2(x_n) \quad (2.44)$$

Posto $p_n(x) = s_2(x)$, le prime due condizioni diventano:

$$\begin{aligned} a_n &= y_n \cdot x_n \cdot e^{x_n} \\ \lambda_n &= a_n \cdot k(x_n) \cdot \bar{k}(x_n) \end{aligned} \quad (2.45)$$

La continuità di s'' in x_n si ottiene imponendo:

$$p''_{n-1}(x_n) = p''_n(x_n)$$

che, dalla **Proposizione 2.3** si può esprimere come:

$$\frac{2}{h_n} \{2\lambda_n + \lambda_{n-1} - 3y[x_n, x_{n-1}]\} = a_n \cdot k(x_n) \cdot [\bar{k}^2(x_n) + \bar{\bar{k}}(x_n)] \quad (2.46)$$

Moltiplicando a destra e sinistra per

$$\frac{h_n \cdot h_{n-1}}{h_n + h_{n-1}}, \quad \text{con} \quad \delta_{n-1} = \frac{h_{n-1}}{h_n + h_{n-1}}$$

l'equazione (2.46) si può riscrivere come:

$$2\delta_{n-1} \{2\lambda_n + \lambda_{n-1} - 3y[x_n, x_{n-1}]\} = h_n \delta_{n-1} y_n \cdot [\bar{k}^2(x_n) + \bar{\bar{k}}(x_n)]$$

dunque come:

$$2\delta_{n-1} \lambda_{n-1} + 4\delta_{n-1} \lambda_n = \delta_{n-1} \{6y[x_n, x_{n-1}] + h_n y_n \cdot [\bar{k}^2(x_n) + \bar{\bar{k}}(x_n)]\} \quad (2.47)$$

Aggiungendo, al sistema (2.33) le equazioni (2.45) e (2.47) si ottiene un sistema di n equazioni in n incognite, la cui matrice dei coefficienti è:

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 - \delta_2 & 2 & \delta_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \delta_3 & 2 & \delta_3 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 - \delta_{n-1} & 2 & \delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 2\delta_{n-1} & 4\delta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

triangolare superiore, a banda con ampiezza di banda superiore 2 ed inferiore 0; il

vettore dei termini noti è:

$$g_2 = \begin{pmatrix} 3\{(1 - \delta_2)y[x_2, x_1] + \delta_2 y[x_2, x_3]\} \\ 3\{(1 - \delta_3)y[x_3, x_2] + \delta_3 y[x_3, x_4]\} \\ \vdots \\ \delta_{n-1}\{6y[x_n, x_{n-1}] + h_n y_n \cdot [\bar{k}^2(x_n) + \bar{\bar{k}}(x_n)]\} \\ a_n \cdot k(x_n) \cdot \bar{\bar{k}}(x_n) \end{pmatrix}$$

Il vettore soluzione contiene le derivate prime della spline nei nodi, a partire dalle quali è possibile calcolare i coefficienti della funzione, intervallo per intervallo.

Illustriamo, di seguito, i risultati ottenuti implementando l'algoritmo per il metodo appena descritto ed applicandolo al calcolo dei coefficienti della spline generalizzata interpolante i dati dell'esempio 2.4.1.

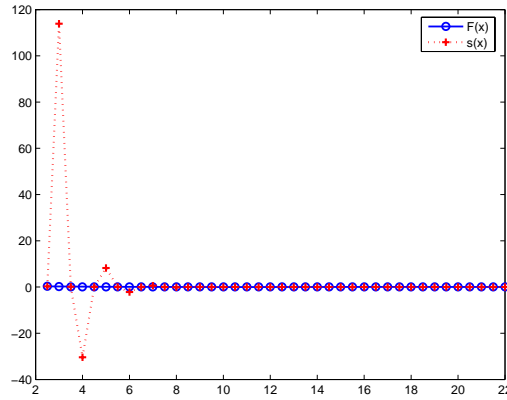


Figura 2.6: **Spline costruita imponendo $s_{Lt} \in C^2((x_1, +\infty))$**

In Fig. 2.8 è tracciata la curva dell'errore assoluto commesso nell'approssimazione di F con s_{Lt} . Il suo elevato ordine di grandezza, in particolare in $[x_1, x_4] = [2.5, 5.5]$, conferma l'inaccuratezza dell'approssimazione prodotta in tale intervallo. Del resto, a differenza del metodo costruttivo descritto nel paragrafo, non è stata imposta alcuna condizione nei primi nodi, che vincoli l'andamento della spline generalizzata tra i primi quattro nodi. L'instabilità della soluzione è la manifestazione dell'elevato indice di condizionamento della matrice dei coefficienti, il cui andamento, al variare della dimensione del problema, ovvero dell'ampiezza dell'intervallo su cui approssimiamo la trasformata di Laplace con la spline generalizzata, è descritto in Fig. 2.9. Come si può osservare esso cresce, in maniera quasi esponenziale, al crescere il numero dei punti di valutazione.



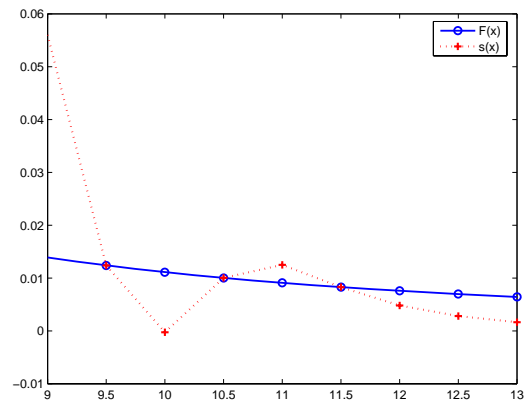


Figura 2.7: **Spline costruita imponendo $s_{Lt} \in C^2((x_1, +\infty))$: dettaglio in un intorno del punto di raccordo $x_n = 11.5$**

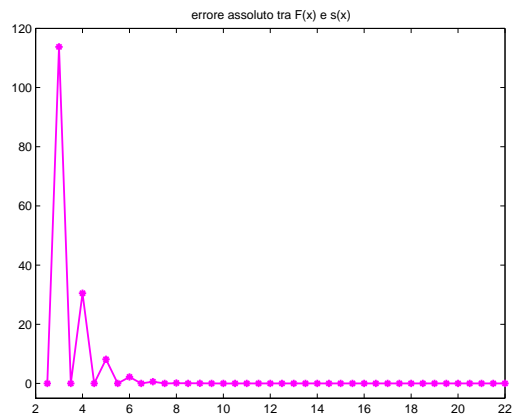


Figura 2.8: **Errore assoluto puntuale $|F(x_i) - s(x_i)|$, $i = 1, \dots, n$**

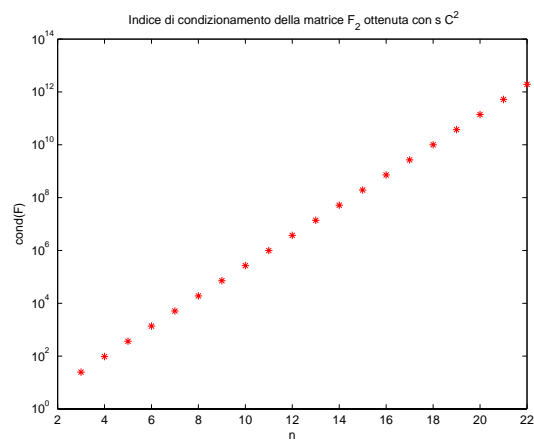


Figura 2.9: **Indice di condizionamento di F_2 , al variare della dimensione**

Si descrivono, infine, i risultati ottenuti attraverso due ulteriori implementazioni, per sottolineare la validità del metodo costruttivo proposto per la spline generalizzata.

Nel primo caso, partendo dal sistema (2.33), si costruisce la spline cubica *naturale*, imponendo che la derivata seconda della funzione spline sia nulla in x_1 e x_n ; si raccorda, poi, quest'ultima con continuità in x_n , con s_2 . La curva risultante è illustrata in Fig. 2.10-2.11.

Nel secondo caso si costruisce la spline cubica interpolante un insieme di nodi fissati attraverso la funzione `spapi` di `matlab`; essa sarà una combinazione lineare di B-splines, di cui si calcolano i coefficienti risolvendo il sistema $n \times n$ ottenuto imponendo le n condizioni di interpolazione; raccordando quest'ultima con continuità in x_n , con s_2 si ottengono le curve in Fig. 2.12-2.13. In entrambi i casi è stata imposta la sola continuità della funzione spline nel nodo x_n (necessaria per calcolare il coefficiente a_n).

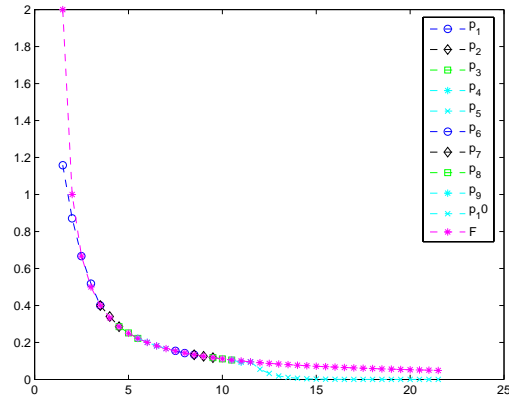


Figura 2.10: Spline cubica naturale raccordata con s_2

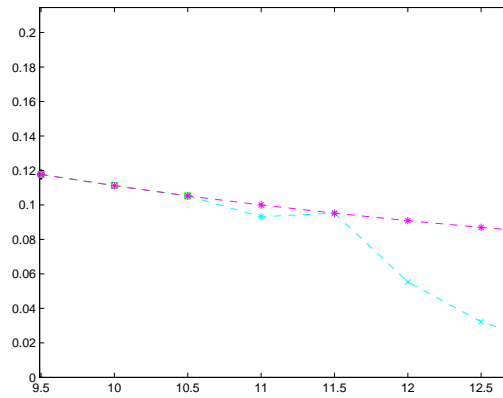


Figura 2.11: **Spline cubica naturale** raccordata con s_2 : dettaglio sul punto di raccordo $x_n = 11.5$

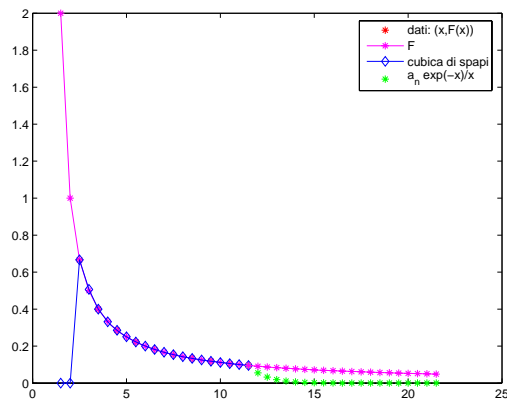


Figura 2.12: **Spline cubica interpolante** raccordata con s_2

2.5 Formulazione del modello nel caso complesso

Descriviamo, di seguito, alcuni **spunti risolutivi** sulla **formulazione del modello nel caso complesso**.

Consideriamo il **Problema 2.3**. Assumiamo, cioè, che sia assegnato un insieme di campioni, $(z_i, F(z_i))_{i=1, \dots, n}$, valori complessi di una Trasformata di Laplace, F . Sebbene la F possa avere un numero finito di singolarità *al fini-*

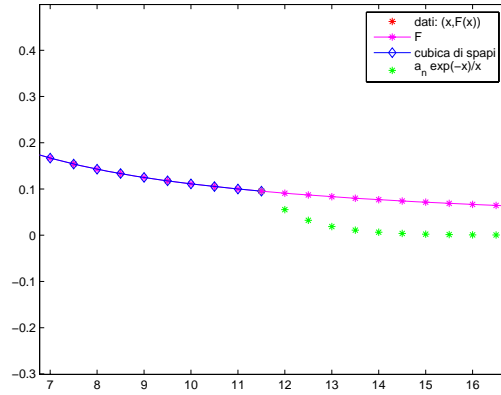


Figura 2.13: **Spline cubica interpolante raccordata con s_2 : dettaglio sul punto di raccordo $x_n = 11.5$**

to, è noto che $z = \infty$ è un punto di regolarità, in particolare uno zero, per F .

Studiamo, quindi, l'andamento della funzione Trasformata di Laplace nella regione di convergenza, nella quale F è analitica, e nella quale supponiamo cadano i campioni, a partire dai quali determinare l'approssimazione cercata.

Siano x_1, \dots, x_n le ascisse dei nodi $z_i \in \mathbb{C}$, $\forall i$, assegnati. Assumiamo l'ipotesi che i campioni siano valori di una funzione Trasformata di Laplace complessa, dunque cadano nella sua regione di convergenza, Ω . Quest'ultima si può immaginare suddivisa, dai nodi, in connessi del tipo $A_i = [x_i, x_{i+1}] \times (-\infty, +\infty)$, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, all'interno dei quali F è olomorfa, dunque, sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale $z_0 \in A_i$, e raggio di convergenza maggiore o uguale alla distanza di z_0 dalla

frontiera di A_i ¹⁴:

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j \quad (2.49)$$

Il polinomio di Taylor di grado m , P_m , fornisce, in un intorno di un punto $z_0 \in A_i$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ un'approssimazione della funzione con un errore

$$|F(z) - P_m(z)| \approx \mathcal{O}((z - z_0)^{m+1})$$

Relativamente, invece, all'aperto connesso $A_n = [x_n, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$, poiché $F(z)$ **tende a zero all'infinito** cioè $z = \infty$ **è un punto regolare per F , che in particolare è uno zero, almeno del primo ordine**, possiamo considerare lo sviluppo in serie di Laurent di F , in un intorno di infinito, con contorno al finito. Detto I_n tale intorno, costituito dai punti esterni ad un cerchio di centro l'origine e raggio finito, nella regione comune $C_n = I_n \cap A_n$ F ammette, allora, uno sviluppo del tipo ¹⁵

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (2.51)$$

Dallo sviluppo in serie di Taylor (o di Laurent) della Trasformata

¹⁴Se, in particolare, un punto $z_0 \in A_i$ è uno **zero di ordine k** per F , ovvero tale che

$$F(z_0) = \dots = F^{(k-1)}(z_0) = 0, \quad F^{(k)} \neq 0,$$

la funzione si può esprimere, in un intorno di z_0 , come

$$F(z) = (z - z_0)^k F_k(z) \quad (2.48)$$

con $F_k(z)$ funzione olomorfa e non nulla in z_0 .

Ricordiamo che una funzione olomorfa in un campo connesso ha solo zeri isolati mentre gli eventuali punti di accumulazione per l'insieme degli zeri appartengono alla frontiera.

¹⁵Il punto $z = \infty$ sarà, in particolare, uno **zero di ordine k** , $k \geq 1$, per F se nello sviluppo (2.51) sono nulli tutti i coefficienti a_h , con $h < k$ mentre $a_k \neq 0$, sicché lo sviluppo (2.51) si ridurrà a:

$$F(z) = \frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \dots$$

con $a_k \neq 0$. Si può, dunque, rappresentare F come

$$F(z) = \frac{1}{z^k} g(z) \quad (2.50)$$

con g regolare e non nulla per $z = \infty$.

di Laplace, nasce l'idea di approssimare la F con una funzione spline che nella regione di convergenza di F , che indicheremo con

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \quad t.c. \quad Re(z) \geq \alpha_f\},$$

ammetta una rappresentazione del tipo

$$s(z) = \sum_{j=1}^n a_j \psi_j(|z - z_j|)$$

In essa, n è il numero dei campioni a partire dai quali definire l'approssimazione, e le ψ_j , $j = 1, \dots, n$ sono le funzioni che rappresentano la restrizione della spline alla striscia $A_i = [x_i, x_{i+1}] \times (-\infty, +\infty)$. Le ψ_j , $j = 1, \dots, n$ costituiranno il sistema di generatori per lo spazio

$$ST(K) = span < \psi_1, \dots, \psi_n >$$

cui apparterrà la spline $s \approx F$.

L'idea è, dunque, quella di definire la base delle funzioni con cui approssimare la Trasformata nella sua regione di convergenza. In particolare, come per il caso reale sarà necessario, poi, raccordare, con regolarità opportuna, la funzione spline approssimante la Trasformata al finito con una funzione che, definita sulla base delle proprietà asintotiche delle trasformate di Laplace,

$$\lim_{Re(s) \rightarrow +\infty} F(s) = 0, \quad (2.52)$$

$$\lim_{Re(s) \rightarrow +\infty} \frac{F(s)}{s} = 0, \quad (2.53)$$

$$\lim_{Re(s) \rightarrow +\infty} s \cdot F(s) < \infty \quad (2.54)$$

ne costituisca un'approssimazione sufficientemente accurata in un intorno di ∞ , cioè per $Re(z) \rightarrow \infty$.

Come illustrato nel §2.2, il problema di approssimazione della Trasformata di Laplace complessa,

$$F : z = x + iy \in \mathbb{C} \rightarrow F(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in \mathbb{C}$$

intesa come funzione (vettoriale) di due componenti reali $(u(x, y)$ e $v(x, y))$ dipendenti da due variabili reali x e y ,

$$(x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$$

è riconducibile alla risoluzione di due problemi di approssimazione di funzioni reali, bidimensionali, u e v ; essi sono finalizzati ad individuare, sia per u che per v , due approssimazioni *locali*, una al finito ed una all'infinito, che raccordate opportunamente diano luogo alle **spline generalizzate**¹⁶ s_{re} e s_{im} , approssimazioni di u e v , rispettivamente in tutto Ω . Queste ultime, composte come $s_{re} + i s_{im}$, daranno luogo a $s_{Lt} \approx F$; la bontà dell'approssimazione fornita si potrà, infine, stimare attraverso la:

$$\begin{aligned} \|s_{Lt} - F\| &= \|(s_{re} + i s_{im}) - (u + i v)\| < \\ &< \|s_{re} - u\| + \|s_{im} - v\| \end{aligned}$$

Partiamo dall'idea di definire la funzione approssimante come minimo di un funzionale, attraverso il quale imporre alla soluzione le condizioni di *interpolazione*, di *regolarità* e l'essere *limitata all'infinito*.

Nel §2.2 abbiamo affermato la necessità di cercare, a tal fine, una funzione $s_{Lt} = s_{re} + i s_{im}$, tale che le sue parti s_{re} e s_{im} soddisfino le:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot |s_{re}(x, y)| < \infty \quad \text{e} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \cdot |s_{im}(x, y)| < \infty$$

e tale che la *spline generalizzata* s_{re} minimizzi il funzionale

$$\sum_{i=1}^n w_i (s(x_i, y_i) - \tilde{w}_i)^2 + \rho \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot |s(x, y)| dx dy \quad (2.55)$$

con $\rho > 0$, $w_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, pesi assegnati e $\tilde{w}_i = u_i$, in uno spazio di funzioni \mathcal{G}_1 ; analogamente la *spline generalizzata* s_{im} minimizzi (2.55) in uno spazio di funzioni \mathcal{G}_2 , avendo posto $\tilde{w}_i = v_i$.

Assumiamo la convenzione di rappresentare graficamente una funzione complessa di variabile complessa mediante grafici 3D, tracciando, in particolare,

¹⁶Utilizziamo, anche nel caso bidimensionale, la notazione di **spline generalizzata** per fare riferimento ad una funzione definita raccordando con regolarità funzioni appartenenti a spazi eventualmente distinti.

in due grafici indipendenti, le due funzioni *bivariate*¹⁷, parte reale e coefficiente dell'immaginario, dalla cui approssimazione dedurre quella della funzione F .

Lo studio delle approssimazioni per le funzioni u , v è stato agevolato dall'analisi delle relative *superfici rappresentative*.

In Appendice A si riportano alcuni approfondimenti sull'**interpolazione bidimensionale**.

Con questa scelta riguardiamo l'insieme di dati come terne:

$$(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x, y, v(x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

per cui il problema nel caso complesso può riformularsi come segue:

Problema 2.4. *Siano assegnati due insiemi costituiti da n punti distinti in \mathbb{R}^3 ,*

$$\{\mathbf{P}_i\}_{i=1,\dots,n} = \{x_i, y_i, u(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,n},$$

e

$$\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1,\dots,n} = \{x_i, y_i, v(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,n},$$

con

$$z_i = x_i + i y_i, \quad u(x_i, y_i) = \text{real}(F(z_i)) \quad e \quad v(x_i, y_i) = \text{imag}(F(z_i))$$

Siano M_u e M_v le superfici di \mathbb{R}^3 con cui si rappresentano la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di una funzione Trasformata di Laplace, F . Determinare le funzioni s_{re} e s_{im} , le cui superfici rappresentative M_{re} e M_{im} siano interpolanti i $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1,\dots,n}$ ed i $\{\mathbf{Q}_i\}_{i=1,\dots,n}$ e siano approssimazioni "sufficientemente accurate" di M_u e M_v , rispettivamente, in tutto Ω .

Come accennato, imponendo le proprietà che caratterizzano l'andamento della funzione Trasformata di Laplace all'infinito, si vogliono definire, in realtà, sia per u che per v , due approssimazioni locali, una al finito, l'altra all'infinito. La loro rappresentazione mediante superfici comporterà la necessità di definire una superficie con cui raccordarle attraverso opportune

¹⁷Per *funzione bivariata* intendiamo una funzione caratterizzata da un dominio rettangolare sul piano xy , che ad un punto z , di coordinate (x, y) , appartenente a tale dominio, associa un valore di quota $w = h(z)$, con h funzione opportuna.

condizioni di regolarità. Definiamo tale superficie **blending surface** (Appendice A.2.1). La funzione che dà luogo alla superficie di blend sarà parte della funzione spline generalizzata, nata dalla composizione delle tre approssimazioni locali.

Si aggiunge, dunque, al **Problema 2.4**, sia per u che per v , il seguente:

Problema 2.5. *Siano*

$$u, v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

*parte reale e coefficiente dell'immaginario di una funzione Trasformata di Laplace. Definite le funzioni spline approssimanti u e v al finito e le funzioni approssimanti u, v in un intorno di infinito, costruire una superficie smooth di separazione (ovvero di congiunzione), detta **blending surface**, tra le loro rappresentazioni, al finito ed all'infinito.*

Le soluzioni del **Problema 2.5**, daranno luogo alle due superfici globalmente *smooth*, rappresentazione delle spline generalizzate, s_{re} e s_{im} , approssimanti u e v rispettivamente.

L'idea di costruire una superficie di *blend*, nasce identificando la richiesta di relazionare, in modo regolare le due superfici al finito ed all'infinito, con la necessità che si presenta, in particolare in problemi di grafica, di ricostruire parti mancanti di superficie, in oggetti 3D [10]. In questi problemi le spline *poliarmoniche* sono preferite per la loro proprietà di minimizzazione dell'energia e, dunque, di regolarizzazione.

Sulla base di queste considerazioni, riconduciamo il problema di definire i modelli di spline generalizzata, s_{re} e s_{im} , alla risoluzione di due sottoproblemi:

- **approssimazione locale di dati** e, dunque, rappresentazione di superfici, attraverso la definizione di funzioni generalmente usate per rappresentare superfici smooth; a tal fine si farà riferimento alle così dette funzioni **poliarmoniche** (in particolare **biarmoniche**).¹⁸

¹⁸I metodi per la rappresentazione di superfici includono, essenzialmente, tre tipi di approcci: l'utilizzo di *forme discrete*, quali, ad esempio, collezioni di poligoni e punti campionati, *superfici parametriche* (B-splines and Bézier patches) e *rappresentazioni implicite*.

- **Blend** delle approssimazioni relative a regioni distinte dello spazio, per collegare in modo regolare (ovvero con un opportuno grado di regolarità e di continuità geometrica), le superfici che rappresentano l'andamento della parte reale e del coefficiente dell'immaginario della trasformata, al finito ed in un intorno di infinito, e dare luogo ad una funzione globalmente *smooth*.

2.5.1 Definizione della spline generalizzata

Ritorniamo all'idea di definire le spline generalizzate s_{re} e s_{im} minimizzando il funzionale del tipo (2.55). In analogia al **metodo di Schoenberg** per la risoluzione di un problema di regolarizzazione di dati discreti, formuliamo il seguente ¹⁹:

Problema 2.6. *Assegnati i nodi $(x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ed i valori $\tilde{w}_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, determinare la funzione $\bar{s} \in \mathcal{F}$, tale che:*

$$\bar{s} = \min_s \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s(x_i, y_i) - \tilde{w}_i)^2 + \rho E[s] \right\} \quad (2.56)$$

in cui il termine di regolarizzazione

$$E[s] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 s(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 s(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 s(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy, \quad (2.57)$$

rappresenta la funzione energia, con Ω regione del piano xy contenente i punti (x_i, y_i) . Questa energia è misura della curvatura della superficie s su Ω .

Il processo di minimizzazione della curvatura è spesso riferito come *regolarizzazione* e consente di individuare l'unica superficie tra le infinite interpolanti.

La soluzione al **Problema 2.6**, definita come **thin-plate spline interpolante**, è la funzione che soddisfa i vincoli di interpolazione e minimizza la

¹⁹Come di consueto, il primo termine è una misura dell'accuratezza della soluzione \bar{s} come funzione interpolante, il secondo termine è una misura della regolarità di \bar{s} . Il parametro ρ controlla il bilanciamento tra regolarità e fedeltà ai dati: per $\rho \rightarrow 0$ la \bar{s} si riduce ad una spline interpolante, per $\rho \rightarrow \infty$ ad un polinomio.

funzione energia²⁰. Essa è esprimibile come combinazione lineare di funzioni base, radialmente simmetriche rispetto ad un nodo (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, detto *centro della funzione base*, del tipo:

$$s : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow p(x, y) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(r) \in \mathbb{R} \quad (2.59)$$

dove

$$r = \|(x, y) - (x_i, y_i)\| = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

è la distanza Euclidea del punto dello spazio (x, y) da (x_i, y_i) , p è un polinomio di grado basso opportunamente definito e dipendente dalla scelta della funzione base ϕ ed i coefficienti λ_i sono numeri reali, detti *pesi*.

La scelta della funzione ϕ (**radial basis function, RBF**), caratterizza la soluzione s .

Osservazione 2.4. *Il principale vantaggio che si trae dall'utilizzo di superfici definite implicitamente attraverso funzioni base radialmente simmetriche, si riscontra nella proprietà di minimizzare l'energia così da costruire una superficie regolare, senza conoscere a priori le caratteristiche topologiche della forma da ricostruire, sia interpolando che approssimando i dati. Attraverso le funzioni di tipo RBF si rappresentano, in forma funzionale, insieme*

²⁰Il funzionale (2.56), e più in generale

$$S_\rho(s) = \sum_j (w_j - s_j)^2 + \rho J_m(s),$$

con $w_j = w(x_j, y_j)$, $s_j = s(x_j, y_j)$ e

$$J_m(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\sum \alpha_j = m} \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_d!} \times \left(\frac{\partial^m s}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \right)^2 dx_1 \dots dx_d \quad (2.58)$$

può essere interpretato come *misura della quantità di energia necessaria per flettere una piastra sottile di dimensione infinita fissata in corrispondenza dei punti $(x_j, y_j, w(x_j, y_j))$* . In tal caso ρ rappresenta una costante collegata alla flessibilità della piastra. Di qui il nome **thin-plate spline** o, meglio, **thin-plate smoothing spline** di ordine m per la funzione $s(\rho)$ che minimizza S_ρ . In particolare, per $d = 1$ e $m = 2$ $s = s(\rho)$ è la spline cubica *smoothing, differenziabile due volte con continuità*; è stato provato [39], invece, che per $d = 2$ e $m = 2$ $s = s(\rho)$ è **differenziabile una sola volta**, mentre per $d = 3$ e $m = 2$ $s = s(\rho)$ è *continua ma non differenziabile* in corrispondenza dei nodi. Sostituendo la sommatoria nella (2.58) con

$$\left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 s}{\partial x_k^2} \right)^2$$

si ottiene la **Laplacian smoothing spline**.

di dati appartenenti ad una superficie; gradienti e derivate sono determinati analiticamente e sono continui e smooth, a seconda della scelta delle funzioni di base.

In generale, si parla di **interpolazione di tipo thin-plate**, quando si sceglie di utilizzare come funzione base la *thin-plate spline*:

$$\phi(r) = r^2 \log(r), \quad (2.60)$$

soluzione fondamentale dell'equazione biarmonica non omogenea:

$$\Delta^2 \phi(\|(x, y)\|) = C \delta((x, y)),$$

con δ funzione delta di Dirac ²¹, da cui la soluzione, combinazione lineare dei valori della ϕ è detta anche **spline biarmonica**. Si osserva che, con questa scelta di ϕ , si particolarizza anche il grado del polinomio p della (2.59), che risulta $p \in \Pi_1^2$, con Π_1^2 spazio dei polinomi in due variabili, di grado al più uno.

La scelta della funzione $\phi(r) = r^2 \log(r)$ influenza in maniera globale la ricostruzione, in quanto il suo valore tende a infinito, quando la distanza dal centro della base radialmente simmetrica cresce. La matrice risultante dal sistema con cui si rappresenta il problema in forma matriciale ha per elementi i valori della funzione base in corrispondenza di distanze tra coppie di nodi; essa è densa quando i campioni sono distribuiti uniformemente nella regione di interesse.

Come per il caso reale, l'idea sulla quale si basa la costruzione di un modello nel caso complesso consiste nel definire due funzionali di tipo (2.55), dei quali le uniche funzioni che ne realizzano il minimo, in spazi di funzio-

21

Definizione 2.9. *La funzione delta di Dirac può essere pensata come una funzione a valori reali che è nulla ovunque tranne nell'origine, dove è infinita:*

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases},$$

e soddisfa l'identità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

ni da definire opportunamente, soddisferanno a certe proprietà per cui si potranno assumere come approssimazioni della parte reale e del coefficiente dell'immaginario della Trasformata di Laplace.

Sulla base delle considerazioni relative alla risoluzione del **Problema 2.6**, applicabile a u come a v , risulta, allora, naturale definire le spline generalizzate s_{re} e s_{im} , raccordando, mediante una funzione opportuna, una **spline biarmonica**, che realizzi l'approssimazione al finito, ed una funzione *infinitesima*, da definire, che approssimi la funzione reale all'infinito.

Il capitolo 4 è dedicato ad una serie di test realizzati confrontando le superfici con cui si rappresentano la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di alcune funzioni Trasformata di Laplace, tratte da un database di funzioni test, sia algebriche che trascendenti, con quelle ottenute interpolando i campioni con **spline biarmonica** e con alcuni modelli *classici* di funzioni di tipo spline, **bicubiche**²², il cui andamento è regolato dalla scelta delle condizioni al contorno, sulla griglia di definizione.

Per apprezzare meglio le approssimazioni prodotte, le superfici sono state tracciate distinguendo lo spazio in tre sottoregioni:

1. il semipiano, $Re(z) \geq \alpha_f$, individuato dall'ascissa di convergenza della funzione Trasformata di Laplace da approssimare;
2. la regione in cui cadono le singolarità di F ;
3. un intorno di ∞ ,

dove con *intorno di infinito* si farà riferimento ad una regione *sufficientemente* lontana dal piano di convergenza, nella quale $|F(z)| \rightarrow 0$.

In realtà lo studio dell'approssimazione nella regione in cui cadono le singolarità è stato condotto esclusivamente per trarre informazioni su quanto incida la presenza di singolarità sull'andamento della Trasformata di Laplace, in particolare, in prossimità del piano individuato dall'ascissa di convergenza.

²²Assegnato un insieme di punti dello spazio $(x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3$, è possibile considerare, per essi, un problema di interpolazione di tipo lineare (risp. cubica), che si realizza costruendo, per ogni coppia di punti, la retta (risp. la cubica) interpolante che li congiunge; si parla, invece, di interpolazione bilineare (risp. bicubica) [17], quando si costruisce la **superficie** interpolante 4 punti, congiungendo, in particolare, i vertici del poligono che ne rappresenta la frontiera, mediante tratti lineari (risp. cubici).

Capitolo 3

Esperimenti numerici: caso reale

3.1 Introduzione

Il capitolo descrive la parte di lavoro dedicata alle esperienze effettuate al fine di provare la validità del modello descritto. In particolare, vogliamo stimare, attraverso esperimenti numerici, *quanto* il modello definito, si possa ritenere affidabile.

A tal fine, sono stati realizzati test in cui, assegnato un insieme di campioni reali, è stata costruita la **spline generalizzata**, s_{Lt} , della **Definizione 2.7**, interpolante; la funzione è stata, poi, valutata su intervalli di ampiezza variabile, al fine di osservarne l'andamento, in particolare all'infinito.

Naturalmente, in questa prima fase di testing, abbiamo lavorato su dati *sintetici*, ovvero abbiamo supposto di conoscere l'espressione analitica della funzione Trasformata di Laplace F , di cui i campioni sono le valutazioni in corrispondenza di un insieme arbitrario di nodi, comunque distribuiti. Abbiamo, dunque, confrontato l'andamento della s_{Lt} con quello della F , tracciandone le curve attraverso le valutazioni delle funzioni, in intervalli dell'asse reale di ampiezza sempre maggiore, e stimato, sugli stessi intervalli, l'andamento dell'errore puntuale commesso nell'approssimazione di F con s_{Lt} .

Infine, ad ulteriore conferma della validità del modello definito, abbiamo confrontato l'andamento della spline generalizzata con quello di alcuni modelli di fitting noti, quali le "classiche" spline polinomiali, in particolari cubiche,

generalmente usate nell'approssimazione di dati discreti.

I tests sono stati eseguiti su dati reali, campionati valutando Trasformate di Laplace *razionali*, *irrazionali* e *trascendenti*, tratte dal database seguente.

Database di funzioni test

Trasformata di Laplace F		funzione f
Funzioni algebriche: Trasformate razionali		
1	$1/s$	1
2	$1/s^2$	t
3	$1/s^n$	$t^{n-1}/(n-1)!$
4	$120/s^6$	$120 \cdot t^5/5! = t^5$
5	$1/(s-1)$	e^t
6	$1/(s+1)$	e^{-t}
7	$1/(s+4)$	e^{-4t}
8	$1/s(s-1)$	$(e^t - 1)$
9	$1/(s+1)^2$	te^{-t}
10	$1/s - 1/(s+0.5)$	$1 - \exp(-t/2)$
11	$1/(s^2 + s + 1)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$
12	$s/(s^2 + 1)$	$\cos(t)$

Trasformata di Laplace F	funzione f
13 $2/(s^2 + 4)$	$\sin(2t)$
14 $1/(1 + 0.5s)^3$	$4x^2 e^{-2t}$
15 $2/((s - 1)^2 + 4)$	$e^t \sin(2t)$
16 $1/(s^3 + s^2)$	$e^{-t} - 1 + t$
17 $1/(s(s + 1)^2)$	$1 - (t + 1)e^{-t}$
18 $s/(s^2 + 1)^2$	$\frac{1}{2}(t \sin(t))$
19 $(s^2 - 1)/(s^2 + 1)^2$	$t \cos(t)$
20 $s/((s^2 + 4)(s^2 + 1))$	$(\cos(t) - \cos(2t))/3$
21 $s/(1 + 2s)^3$	$\left(\frac{t}{8} - \frac{t^2}{32}\right)e^{-\frac{t}{2}}$
22 $2/(s(s^2 + 4))$	$\sin^2(t)$
23 $8/(s^2 + 4)^2$	$\frac{1}{2}(\sin 2t - 2t \cos 2t)$
24 $4/s^2(s^2 + 4)$	$t - \frac{1}{2} \sin(2t)$
25 $(27s^2)/(s^2 + 9)^3$	$\frac{1}{8}[(1 + 9t^2) \sin(3t) - (3t) \cos(3t)]$

Trasformata di Laplace F	funzione f
Funzioni algebriche: Trasformate irrazionali	
26 $1/\sqrt{s+2}$	$e^{-2t}/\sqrt{\pi t}$
27 $\sqrt{\sqrt{s^2+4}-s}$	$\sin(2t)/t\sqrt{2\pi t}$
28 $\frac{1}{\sqrt{s}} \cos \frac{2}{s}$	$(\cosh \sqrt{4t} \cdot \cos \sqrt{4t})/\sqrt{\pi t}$
Funzioni trascendenti: Trasformate logaritmiche, esponenziali, trigonometriche	
29 $\exp(-a s)/s$	$u_a(t) = \begin{cases} 1 & t \geq a \text{ Heaviside} \\ 0 & t < a \text{ step function} \end{cases}$
30 $\log(s^2+4) - \log(s^2+1)$	$\frac{2}{t}(\cos t - \cos 2t)$
31 $\log((s^2+1)/s^2)$	$\frac{2}{t}(1 - \cos t)$
32 $\text{atan}(1/s)$	$\sin t/t$
33 $\text{atan}(20/s)$	$\sin 20t/t$
34 $\text{atan}((2s)/(s^2-1+4))$	$\frac{2}{t}(\sin t \cos 2t)$

Le funzioni del database sono state selezionate, innanzitutto, in base alla loro classificazione, in quanto algebriche o trascendenti; le funzioni algebriche, poi, in particolare le *razionali*, sono state scelte in base al numero ed al tipo di discontinuità (o meglio di singolarità) della Trasformata di Laplace intesa come funzione definita nel campo complesso. In particolare abbiamo inserito:

1. Trasformate di Laplace dotate di singolarità **reali**, ad esempio:

$$\begin{aligned}\bullet) F(s) &= \frac{1}{s-a}, \\ \bullet\bullet) F(s) &= \frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad a \neq b\end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$;

2. Trasformate di Laplace dotate di singolarità che sono, in effetti, **poli complessi coniugati**; ad esempio:

$$\begin{aligned}\bullet) F(s) &= \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{oppure} \quad F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \\ \bullet\bullet) F(s) &= \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}\end{aligned}$$

i cui zeri del denominatore sono:

$$\begin{aligned}\bullet) \quad & s \pm i a \\ \bullet\bullet) \quad & s = b \pm i a,\end{aligned}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Infine, Trasformate di Laplace le cui singolarità sono **sia numeri reali che poli complessi coniugati**. Ad esempio la funzione:

$$F(s) = \frac{a^2}{s^2(s^2 + a^2)}$$

i cui zeri del denominatore sono:

$$s = 0, \quad s = \pm i a$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Abbiamo, dunque, eseguito una serie di tests su funzioni razionali, di cui si riportano i risultati ottenuti per:

$$\begin{aligned}8) F(s) &= 1/s(s-1) \\ 14) F(s) &= 1/(1+0.5s)^3 \\ 18) F(s) &= s/(s^2+1)^2\end{aligned} \tag{3.1}$$

nonché la *irrazionale*:

$$26) F = 1/\sqrt{s+2}$$

Sono state testate, infine, alcune funzioni trascendenti, tra le quali:

$$31) F(s) = \log((s^2+1)/(s^2)) \quad \text{logaritmica}$$

$$32) F(s) = \text{atan}(1/s) \quad \text{trigonometrica}$$

3.2 Test nel caso reale

Descriviamo, in questo paragrafo, le approssimazioni prodotte assumendo che la variabile indipendente della Trasformata di Laplace sia reale.

3.2.1 Dettagli implementativi

I test sono stati realizzati utilizzando un opportuno elemento di software matematico, sviluppato in `matlab`, Version 7.0.0., Release 14, che implementa l'algoritmo alla base del metodo costruttivo per la spline generalizzata della **Definizione 2.7**.

In essi abbiamo confrontato l'andamento della spline generalizzata definita con la curva che rappresenta la Trasformata di Laplace nota; quest'ultima è stata, inoltre, confrontata con alcune classiche funzioni spline polinomiali, in particolare cubiche, già implementate da `matlab`; esse si distinguono, essenzialmente, per le condizioni imposte al contorno, nei nodi estremi, che ne determinano l'andamento, tra i nodi ed in $[\alpha_f, x_1]$ e $[x_n, +\infty)$. I modelli con cui abbiamo confrontato la s_{Lt} sono, dunque, le "classiche" spline utilizzate in problemi di *fitting*: la *cubica naturale*, la *complete*, la *not-a-knot* e la *smoothing spline*. Le funzioni `matlab` utilizzate nei test sono: `csape`, `csapi` e `csaps`.

La funzione `csape` di default costruisce la *spline cubica* (risp. bicubica se i dati sono punti dello spazio \mathbb{R}^3) *interpolante complete* ovvero tale che la derivata prima, nel primo e nell'ultimo nodo, sia uguale a quella della funzione da interpolare; in particolare, per *default*, la routine `csape` pone tali derivate uguali a quelle del polinomio di terzo grado, interpolante, rispetti-

vamente, i primi 4 e gli ultimi 4 nodi. In generale, per la funzione `csape` è possibile, comunque, scegliere una delle opzioni in Tabella 3.1:

<code>'complete'</code>	: le derivate prime, rispettivamente nel primo : e nell'ultimo nodo, coincidono, di default, : con la derivata prima del polinomio di terzo grado, : interpolante i primi 4 e gli ultimi 4 nodi; : altrimenti sono assegnate dall'utente
<code>'not-a-knot'</code>	: rende la spline C^3 nel primo e nell'ultimo nodo
<code>'periodic'</code>	: rende derivata prima e seconda nel primo nodo : uguali, rispettivamente, a quelle nell'ultimo nodo
<code>'second'</code>	: rende uguali le derivate seconde agli estremi
<code>'variational'</code>	: impone che la derivata seconda sia nulla agli estremi

Tabella 3.1: Opzioni per la funzione `csape`

Dunque, tra le altre, `csape` con l'opzione `'variational'` implementa la *spline cubica naturale interpolante*.

La funzione `csapi` costruisce, invece, la *spline cubica* (resp. *bicubica*) *interpolante not-a-knot* (in analogia a `csape` con l'opzione `'not-a-knot'`), mentre la `csaps` implementa la *smoothing spline*.

3.2.2 $F(s) = 1/s(s-1)$

Si descrivono i risultati ottenuti assumendo che i dati siano i valori della funzione reale:

$$8) F(s) = 1/s(s-1) \quad f(t) = e^t - 1$$

La funzione ha due punti di discontinuità, $s = 0$, $s = 1$.

L'ascissa di convergenza è $\alpha_f = 1$; il semipiano di convergenza è individuato dalla retta di equazione $x = 1$, del piano cartesiano xy . **Eseguiamo una serie di test in cui, fissato il numero dei nodi di costruzione delle spline, valutiamo le funzioni su intervalli di ampiezza variabile dell'asse delle ascisse.**

Utilizziamo le notazioni seguenti: indichiamo con n il numero dei nodi di costruzione (numero dei campioni); e con nv il numero dei punti di valutazione.

Test di approssimazione

Sia $n = 5$; i campioni appartengono all'intervallo $[1.2, 21.2]$, e sono distribuiti con passo di discretizzazione $h = 5$:

$$x_0 = 1.2, \quad x_i = 1.2 + i * h, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Sia, inoltre, $nv = 10$; costruiamo la spline s_{Lt} nell'intervallo di valutazione: $[1.2, 46.2]$, in corrispondenza dei punti distribuiti con passo di discretizzazione $hv = 5$.

Come si può dedurre dall'andamento delle curve descritte, l'errore assoluto, commesso nell'approssimazione della trasformata di Laplace mediante la spline della Definizione 2.7, tende a zero al crescere del numero dei punti di valutazione esterni all'intervallo di costruzione. Al contrario, lo stesso errore prodotto dalle spline polinomiali con diverse condizioni al contorno cresce notevolmente, per $x \rightarrow \infty$.

I risultati illustrati dai grafici trovano riscontro nei valori degli errori assoluti descritti nel §3.2.3. In particolare si osserva che la *smoothing spline* e la *not-a-knot* presentano un andamento crescente, all'infinito, a differenza

della *complete* e della *naturale* che decrescono notevolmente assumendo, per $x \rightarrow \infty$, valori negativi.

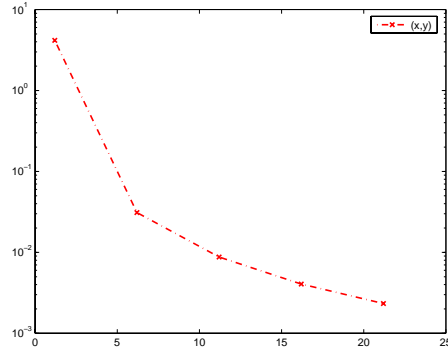


Figura 3.1: **Dati:** $(x, F(x))$

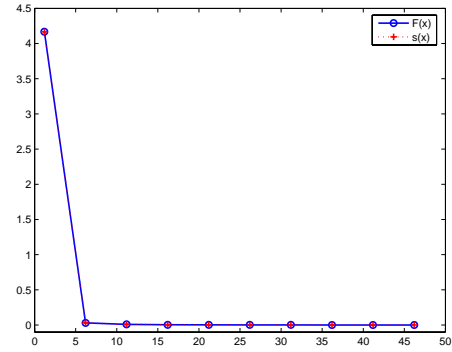


Figura 3.2: **Confronto tra** $s_{Lt}(x)$ **e** $F(x)$, $nv = 10$

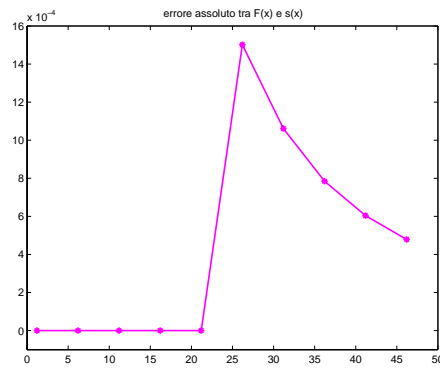


Figura 3.3: **Errore assoluto tra** la spline s_{Lt} **e la funzione** Trasformata di Laplace, $nv = 10$

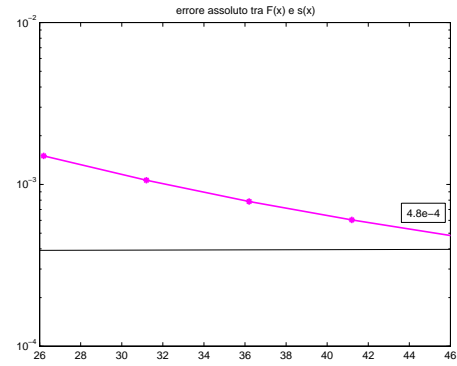


Figura 3.4: **Dettaglio: errore as-** **soluto tra la spline** s_{Lt} **e la fun-** **zione** Trasformata di Laplace, $nv = 10$

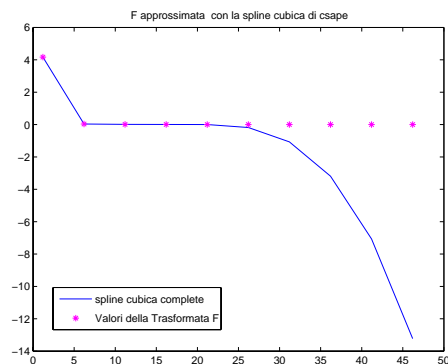


Figura 3.5: Ricostruzione con spline interpolante complete, $nv = 10$

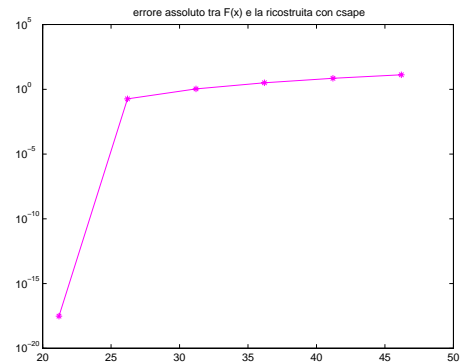


Figura 3.6: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 10$

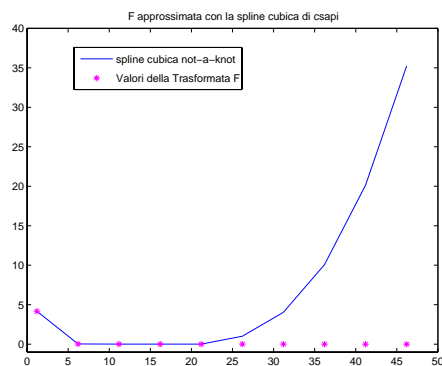


Figura 3.7: Ricostruzione con spline interpolante not-a-knot, $nv = 10$

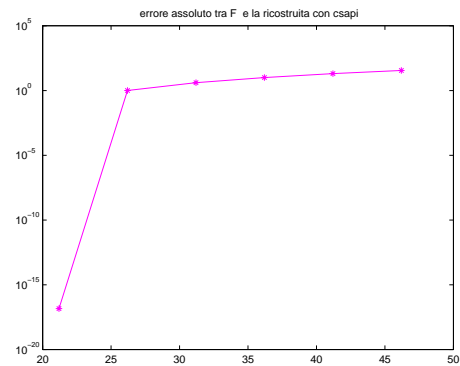


Figura 3.8: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 10$

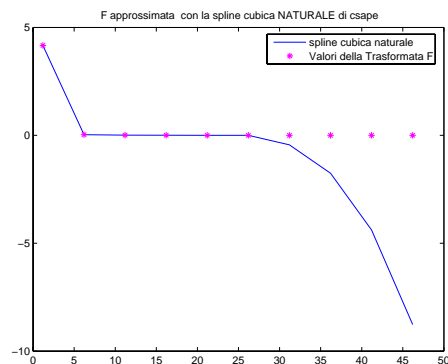


Figura 3.9: Ricostruzione con spline interpolante naturale, $nv = 10$

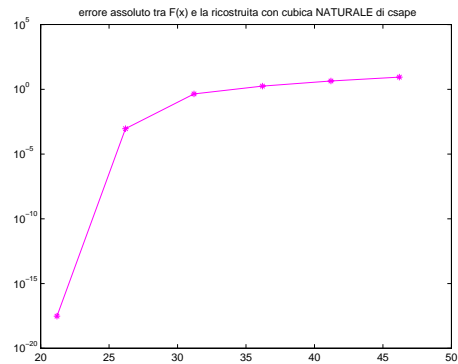


Figura 3.10: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 10$

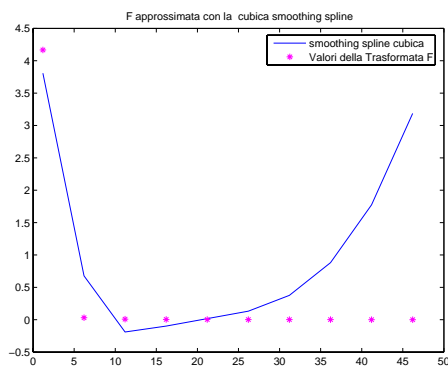


Figura 3.11: Ricostruzione con la smoothing spline cubica, $nv = 10$

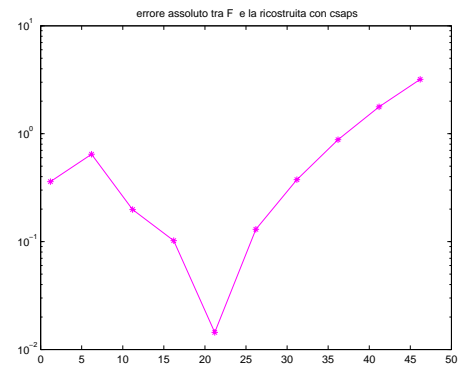


Figura 3.12: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 10$

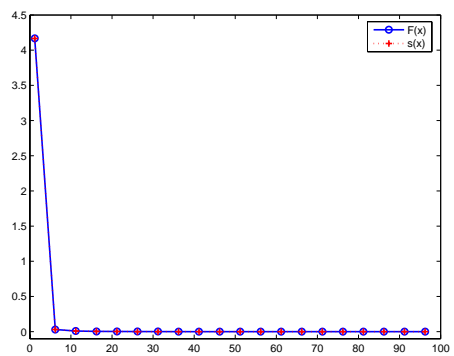


Figura 3.13: **Confronto tra $s_{Lt}(x)$ e $F(x)$, $nv = 20$**

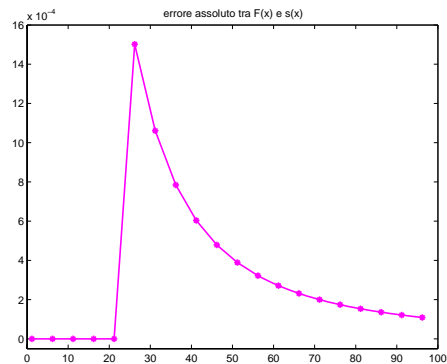


Figura 3.14: **Errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$**

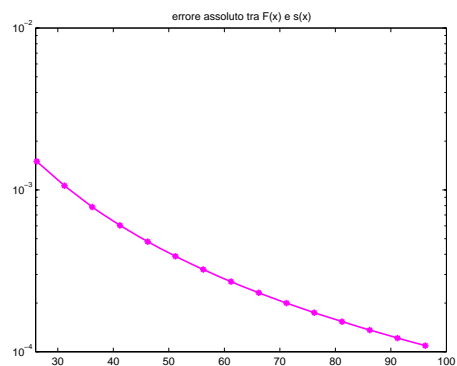


Figura 3.15: **Dettaglio: errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$**

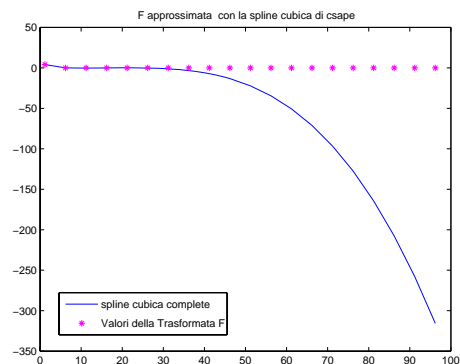


Figura 3.16: Ricostruzione con spline interpolante complete, $nv = 20$

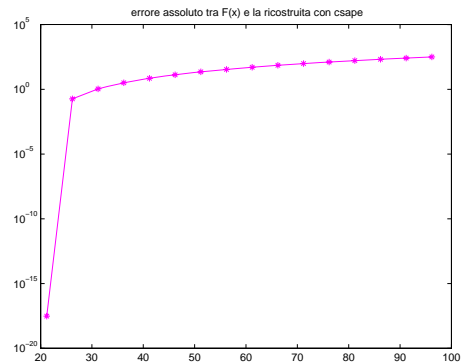


Figura 3.17: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

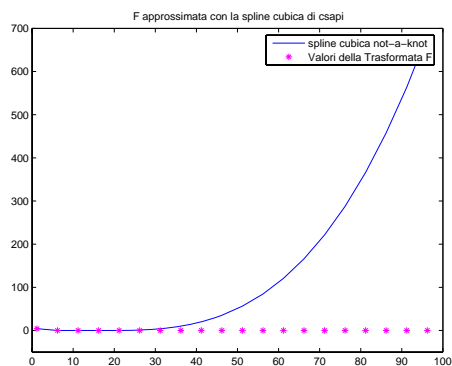


Figura 3.18: Ricostruzione con spline interpolante not-a-knot, $nv = 20$

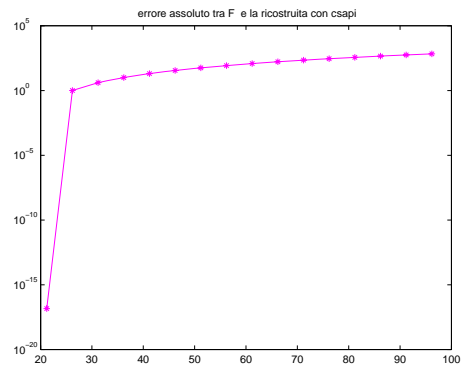


Figura 3.19: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

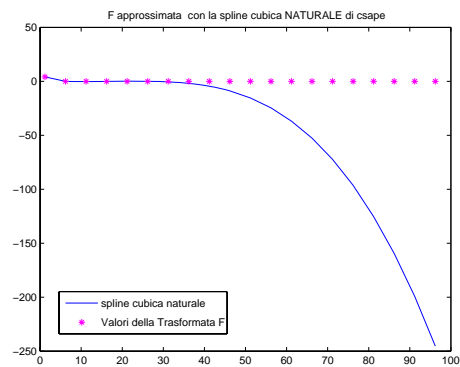


Figura 3.20: Ricostruzione con spline interpolante naturale, $nv = 20$

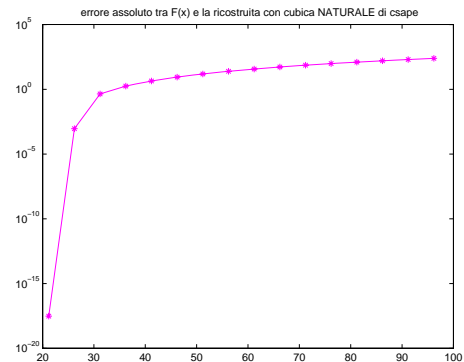


Figura 3.21: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

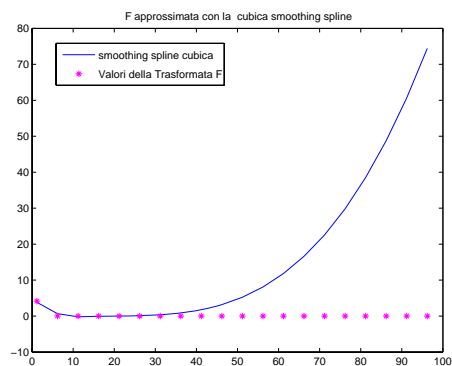


Figura 3.22: Ricostruzione con la smoothing spline cubica, $nv = 20$

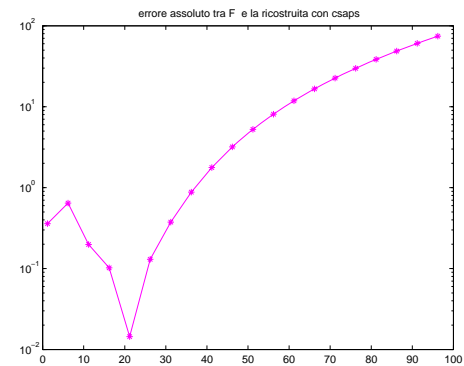


Figura 3.23: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

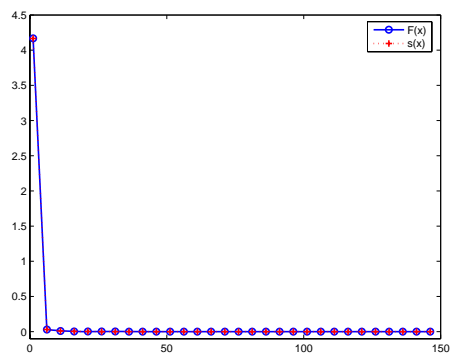


Figura 3.24: **Confronto tra $s_{Lt}(x)$ e $F(x)$, $nv = 30$**

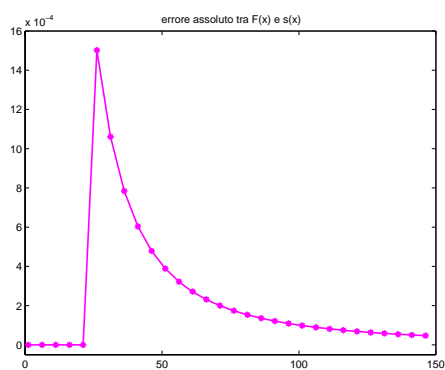


Figura 3.25: **Errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$**

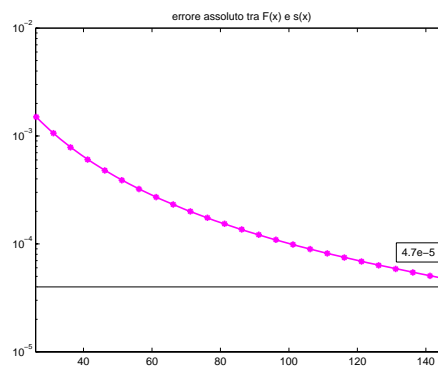


Figura 3.26: **Dettaglio: errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$**

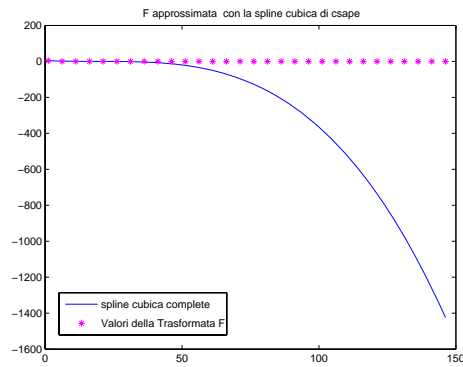


Figura 3.27: Ricostruzione con spline interpolante complete, $nv = 30$

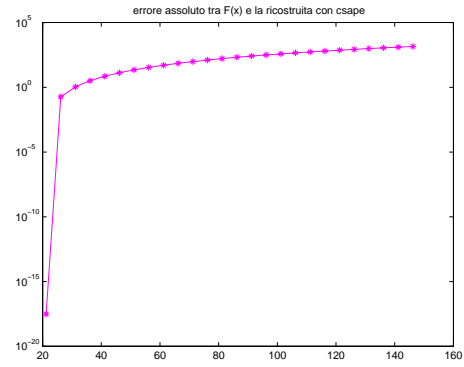


Figura 3.28: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

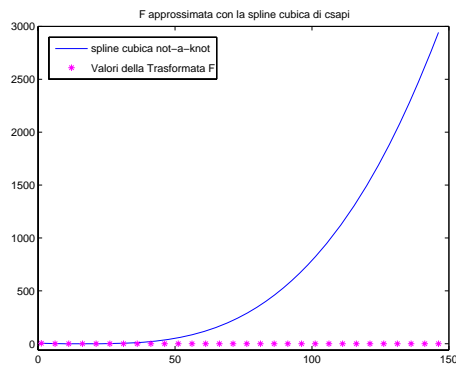


Figura 3.29: Ricostruzione con spline interpolante not-a-knot, $nv = 30$

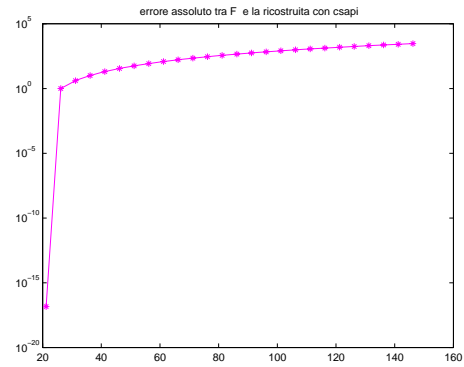


Figura 3.30: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

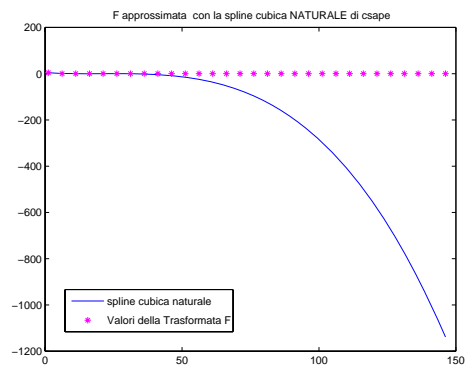


Figura 3.31: Ricostruzione con spline interpolante naturale, $nv = 30$

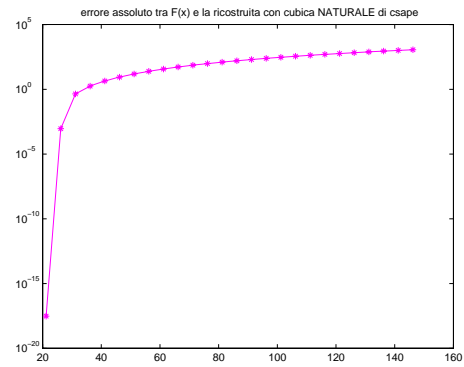


Figura 3.32: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

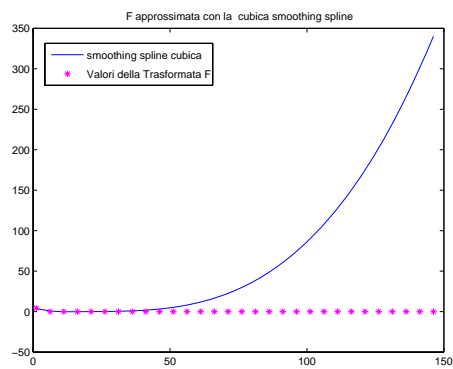


Figura 3.33: Ricostruzione con la smoothing spline cubica, $nv = 30$

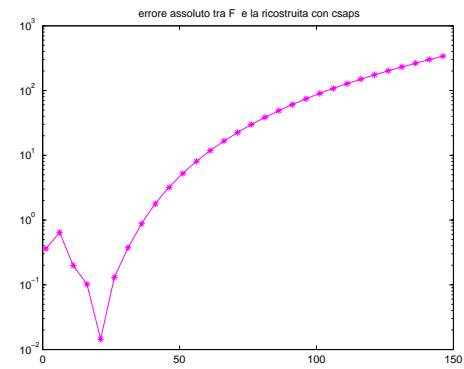


Figura 3.34: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

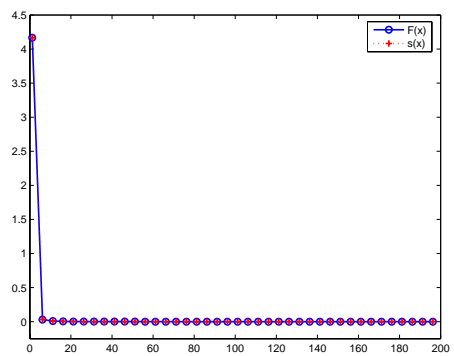


Figura 3.35: **Confronto tra $s_{Lt}(x)$ e $F(x)$, $nv = 40$**

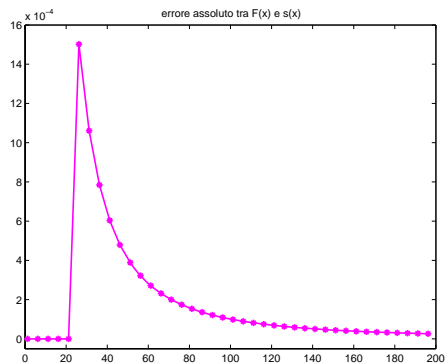


Figura 3.36: **Errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 40$**

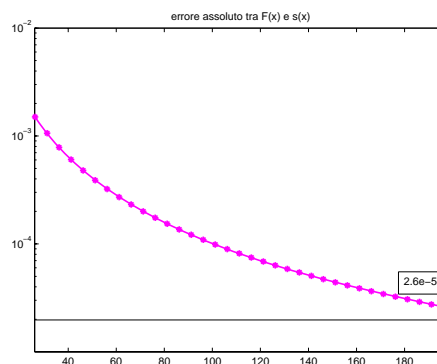


Figura 3.37: **Dettaglio: errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 40$**

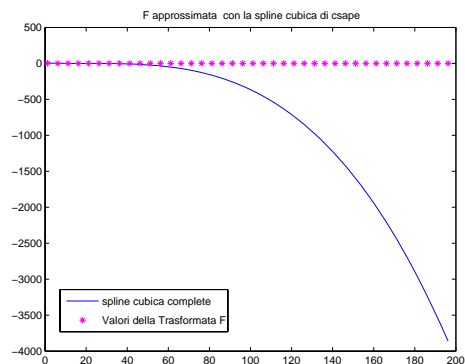


Figura 3.38: Ricostruzione con spline interpolante complete, $nv = 40$

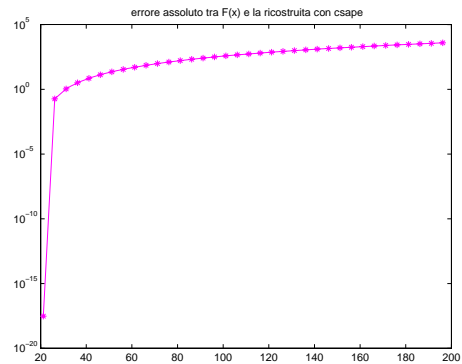


Figura 3.39: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 40$

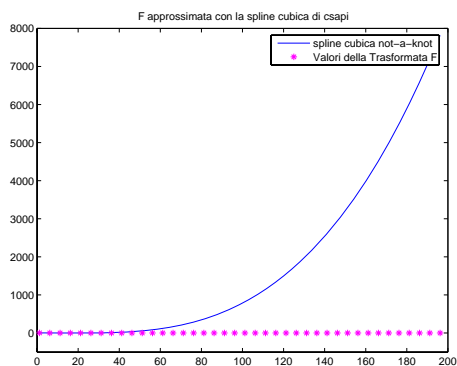


Figura 3.40: Ricostruzione con spline interpolante not-a-knot, $nv = 40$

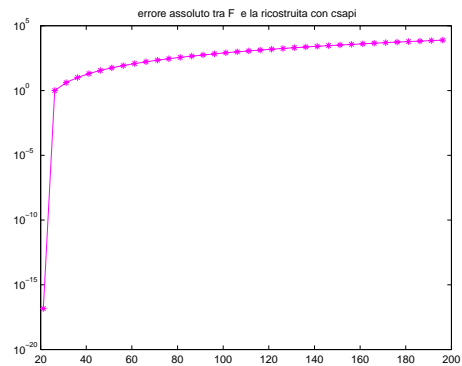


Figura 3.41: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 40$

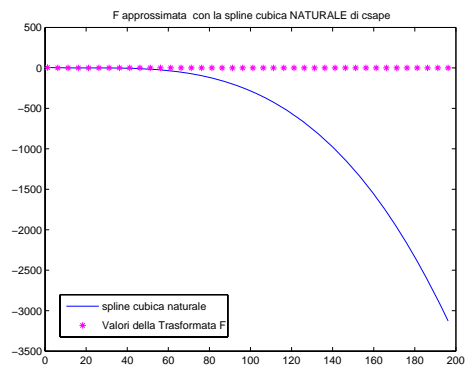


Figura 3.42: Ricostruzione con spline interpolante naturale, $nv = 40$

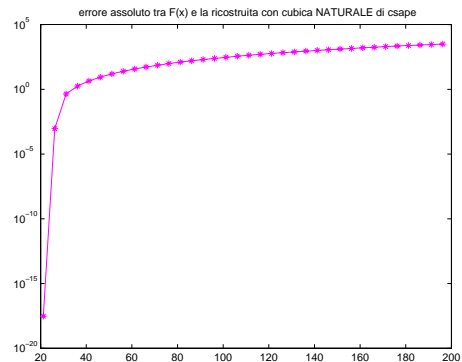


Figura 3.43: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 40$

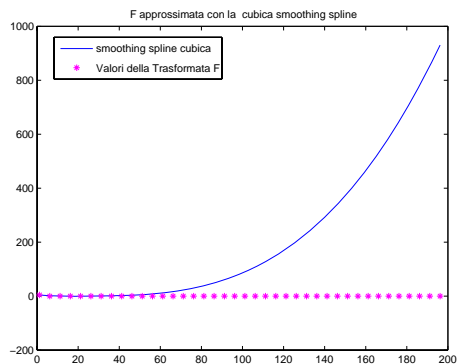


Figura 3.44: Ricostruzione con la smoothing spline cubica, $nv = 40$

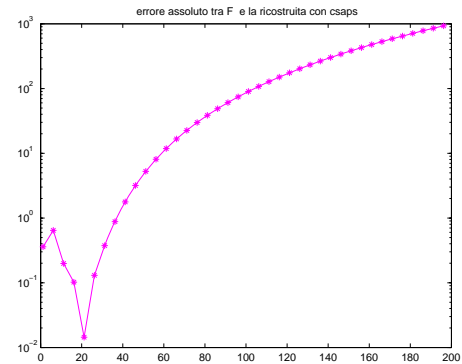


Figura 3.45: Errore assoluto tra la ricostruzione e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 40$

3.2.3 Accuratezza dei risultati

Le tabelle seguenti descrivono l'accuratezza delle approssimazioni prodotte attraverso i diversi modelli di spline interpolante, ovvero attraverso la spline s_{Lt} e quelle implementate dalle funzioni `matlab` testate.

Indicato con $E_{fitting}$ la differenza:

$$E_{fitting} = \max_{i=1,\dots,nv} \{|F(x_i) - \tilde{s}(x_i)|\},$$

dipendente dal modello \tilde{s} e dai nodi x_i , $i = 1, \dots, nv$, riportiamo, in Tabella 3.2, i valori di $E_{fitting}$, **massimo errore assoluto** commesso nell'approssimazione della funzione; in particolare, supponendo di disporre di $n = 5$ campioni, equidistanti, con $h = 5$, e di far variare il numero nv dei punti di valutazione, si confrontano i risultati prodotti dai modelli testati, su intervalli dell'asse reale di ampiezza variabile, dunque per $x \rightarrow \infty$.

$n = 5, h = 5$					
nv	s_{Lt}	<i>complete</i>	<i>not-a-knot</i>	<i>naturale</i>	<i>smoothing</i>
10	1.5019e-03	1.3227e+01	3.5237e+01	8.7659e+00	3.1858e+00
20	1.5019e-03	3.1569e+02	6.8421e+02	2.4528e+02	7.4410e+01
30	1.5019e-03	1.4235e+03	2.9426e+03	1.1387e+03	3.4029e+02
40	1.5019e-03	3.8613e+03	7.8161e+03	3.1271e+03	9.3059e+02

Tabella 3.2: $E_{fitting}$

Conclusioni

I valori in Tabella 3.2 confermano quanto osservato sull'andamento delle funzioni spline all'infinito: le spline polinomiali si allontanano notevolmente dalla Trasformata, già nel primo intervallo $[1.2, 46.2]$. Inoltre, l'errore assoluto commesso nell'approssimazione di F con s_{Lt} , raggiunge un picco in corrispondenza del punto di raccordo, mantenendosi, comunque, dell'ordine di 10^{-3} , per poi tendere a zero all'infinito.

3.2.4 $F(s) = \log((s^2 + 1)/s^2)$

Si descrivono i risultati ottenuti assumendo che i dati siano i valori della funzione reale:

$$31) F(s) = \log((s^2 + 1)/s^2) \quad f(t) = \frac{2}{t} (1 - \cos t)$$

La funzione ha un punto di discontinuità, $s = 0$.

L'ascissa di convergenza è $\alpha_f = 0$; il semipiano di convergenza è quello delle ascisse positive. **Eseguiamo una serie di test in cui, fissato il numero dei nodi di costruzione delle spline, valutiamo le funzioni su intervalli di ampiezza variabile dell'asse delle ascisse.**

Test di approssimazione

Sia $n = 10$; i campioni appartengono all'intervallo $[1, 14.5]$, e sono distribuiti con passo di discretizzazione $h = 1.5$:

$$x_0 = 1, \quad x_i = 1 + i * h, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Sia, inoltre, $nv = 20$; costruiamo la spline s_{Lt} nell'intervallo di valutazione: $[0.5, 38.5]$, in corrispondenza dei punti distribuiti con passo di discretizzazione $hv = 2$.

In questi test proviamo a tracciare l'andamento della s_{Lt} anche per $x \leq x_1$, valutando per essa il polinomio che la rappresenta in $[x_1, x_2]$. I punti in Fig. 3.48 e Fig. 3.58 rappresentano i valori non nulli dell'errore assoluto in scala logaritmica.

Come si può dedurre dall'andamento delle curve descritte, l'errore assoluto, commesso nell'approssimazione della trasformata di Laplace mediante la spline s_{Lt} , tende a zero al crescere del numero dei punti di valutazione esterni all'intervallo di costruzione. Al contrario, lo stesso errore prodotto dalle spline polinomiali con diverse condizioni al contorno cresce notevolmente, per $x \rightarrow \infty$.

I risultati illustrati dai grafici trovano riscontro nei valori degli errori assoluti descritti nel §3.2.5. In particolare si osserva che le spline polinomiali hanno

un andamento decrescente all'infinito, come la Trasformata di Laplace; purtroppo assumono valori negativi, al crescere della variabile indipendente x .

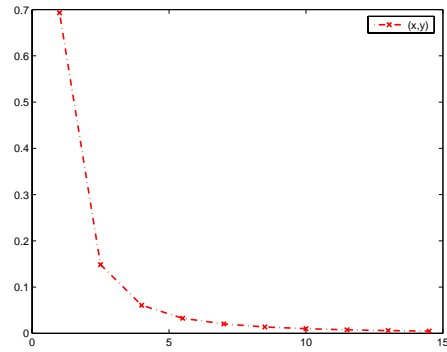


Figura 3.46: **Dati: $(x, F(x))$**

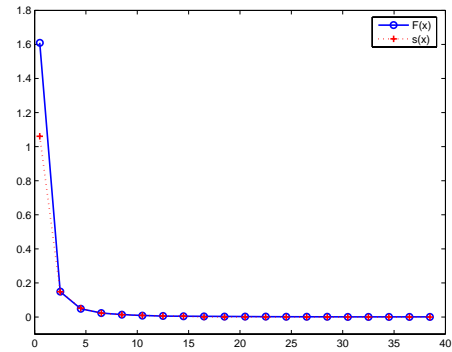


Figura 3.47: **Approssimazione della F con s_{Lt} in $[0.5, 38.5]$**

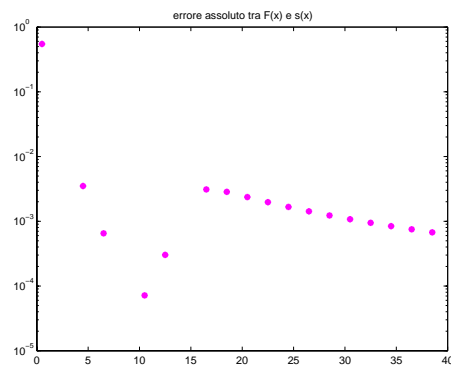


Figura 3.48: **Errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$**

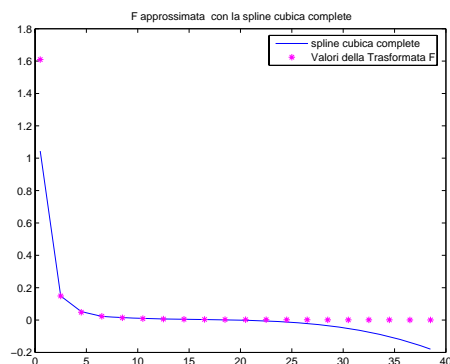


Figura 3.49: Ricostruzione con spline interpolante complete, $nv = 20$

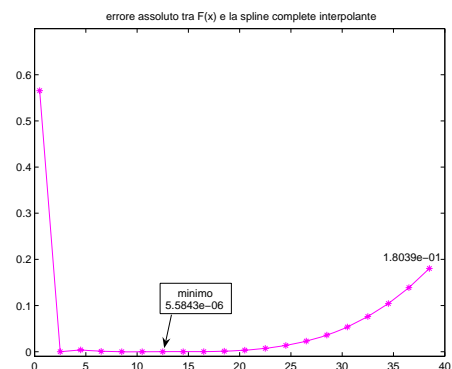


Figura 3.50: Errore assoluto tra la spline cubica complete e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

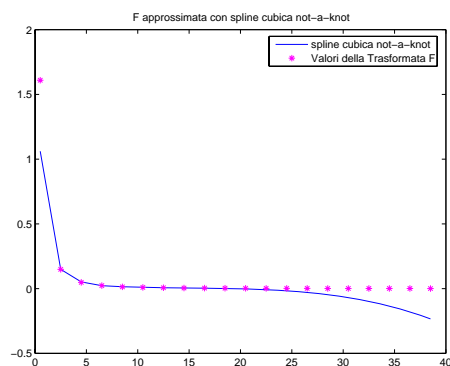


Figura 3.51: Ricostruzione con spline interpolante not-a-knot, $nv = 20$

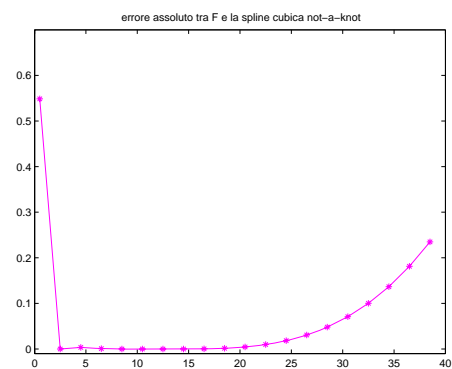


Figura 3.52: Errore assoluto tra la spline cubica not-a-knot e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

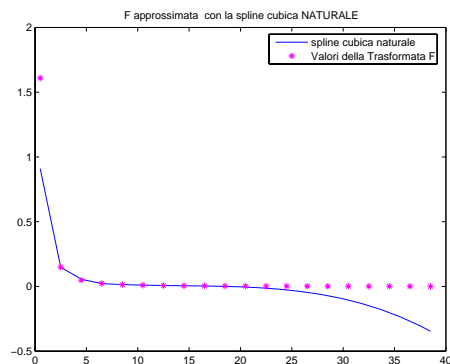


Figura 3.53: Ricostruzione con spline interpolante naturale, $nv = 20$

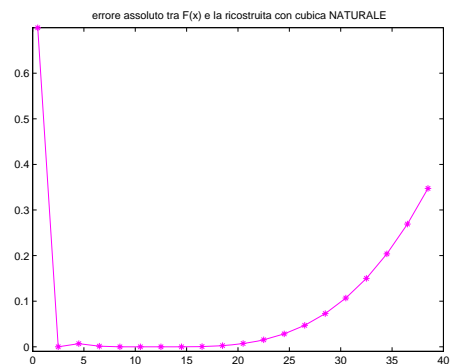


Figura 3.54: Errore assoluto tra la spline cubica naturale e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

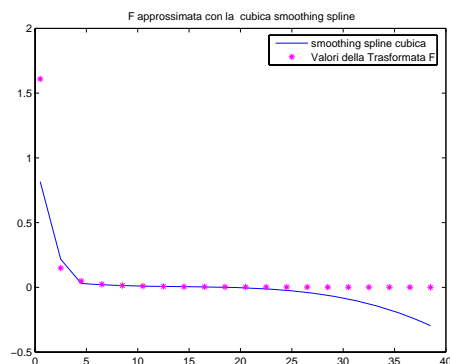


Figura 3.55: Ricostruzione con la spline cubica smoothing, $nv = 20$

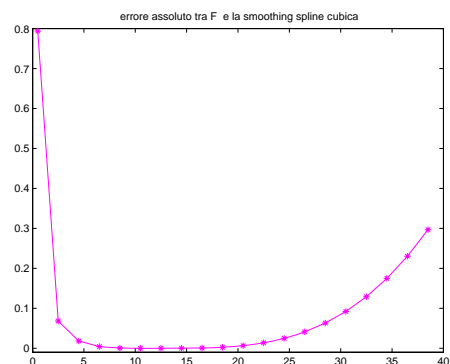


Figura 3.56: Errore assoluto tra la spline cubica smoothing e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

Dalle curve descritte in Fig. 3.57-3.66 si osserva come, aumentando l'ampiezza dell'intervallo aumenta anche la distanza tra le polinomiali e la funzione Trasformata di Laplace. Al contrario, approssimando quest'ultima con la spline generalizzata, l'errore assoluto raggiunge un picco massimo in un intorno del punto di raccordo, il nodo x_n , a partire dal quale decresce e tende a zero all'infinito. Non si riportano le curve ottenute approssimando la trasformata su intervalli di ampiezza maggiore, per i quali si riscontrano risultati analoghi; i valori numerici dell'errore di fitting sono, però, descritti in Tabella 3.3.

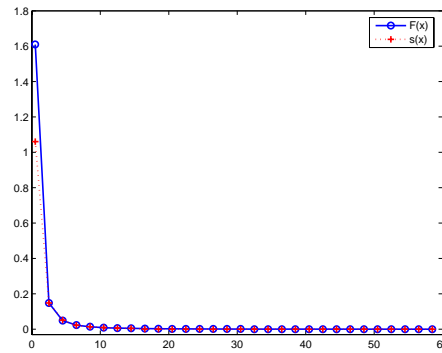


Figura 3.57: **Approssimazione della F con s_{Lt} , $nv = 30$**

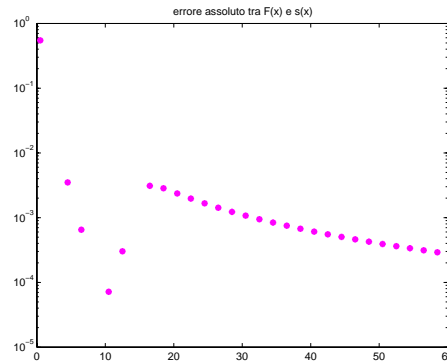


Figura 3.58: **Errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$**

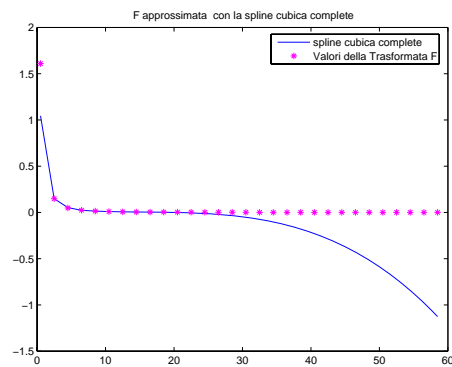


Figura 3.59: Ricostruzione con spline interpolante complete, $nv = 30$

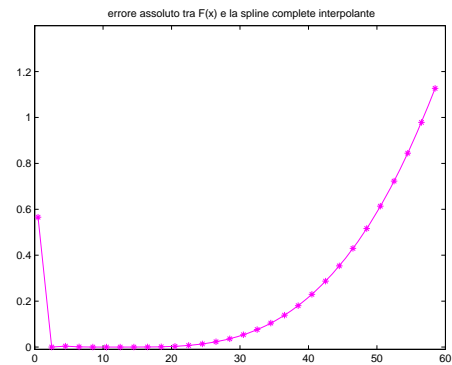


Figura 3.60: Errore assoluto tra la spline cubica completa e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

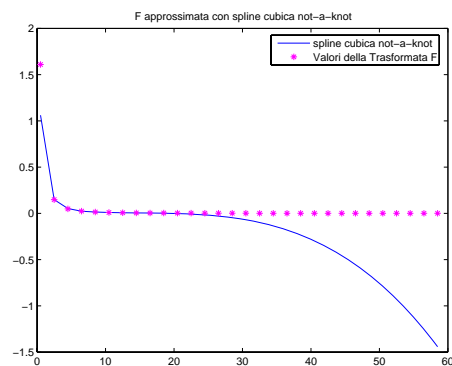


Figura 3.61: Ricostruzione con spline interpolante not-a-knot, $nv = 30$

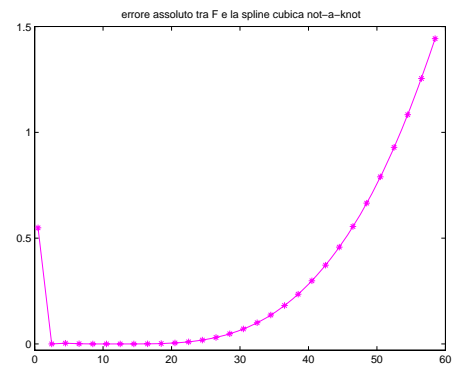


Figura 3.62: Errore assoluto tra la spline cubica not-a-knot e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

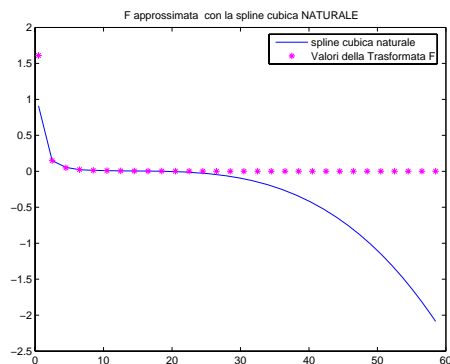


Figura 3.63: Ricostruzione con spline interpolante naturale, $nv = 30$

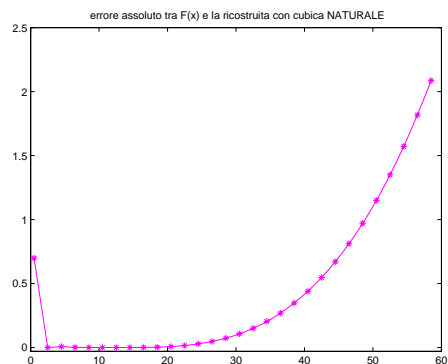


Figura 3.64: Errore assoluto tra la spline cubica naturale e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

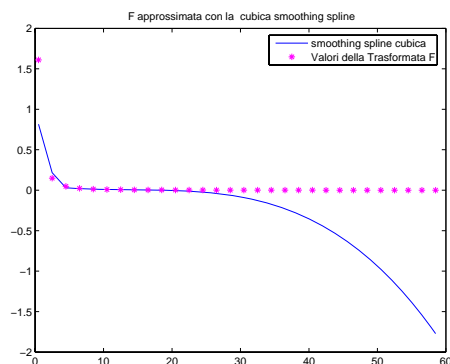


Figura 3.65: Ricostruzione con la spline cubica smoothing, $nv = 30$

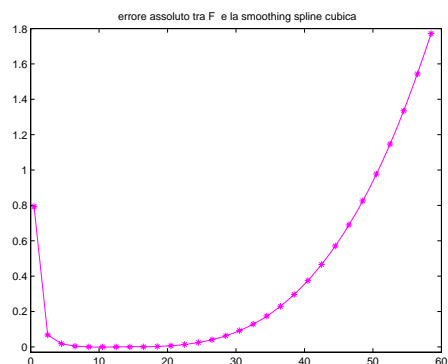


Figura 3.66: Errore assoluto tra la spline cubica smoothing e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

3.2.5 Accuratezza dei risultati

Le tabelle seguenti descrivono l'accuratezza delle approssimazioni prodotte per la Trasformata

$$31) F(s) = \log((s^2 + 1)/s^2) \quad f(t) = \frac{2}{t} (1 - \cos t)$$

attraverso la spline s_{Lt} e quelle implementate dalle funzioni `matlab`.

Riportiamo, in Tabella 3.3, i valori di $E_{fitting}$. In particolare, abbiamo costruito le spline interpolanti 10 nodi e valutate su intervalli dell'asse reale di ampiezza variabile, al crescere del numero dei punti di valutazione.

$n = 10, h = 1.5$					
nv	s_{Lt}	<i>complete</i>	<i>not-a-knot</i>	<i>naturale</i>	<i>smoothing</i>
20	5.4860e-01	5.6557e-01	5.4855e-01	6.9963e-01	7.9374e-01
30	5.4860e-01	1.1268e+00	1.4429e+00	2.0866e+00	1.7720e+00
40	5.4860e-01	3.5032e+00	4.4534e+00	6.3793e+00	5.4091e+00

Tabella 3.3: $E_{fitting}$

Conclusioni

I valori in Tabella 3.3 confermano quanto osservato sull'andamento delle funzioni spline all'infinito: le spline polinomiali si allontanano notevolmente della Trasformata al crescere dell'ampiezza dell'intervallo di valutazione, ovvero per $x \rightarrow \infty$. Inoltre, l'errore assoluto commesso nell'approssimazione di F con s_{Lt} , raggiunge un picco in un intorno del punto di raccordo, per poi tendere a zero all'infinito.

3.2.6 $F(s) = atan(1/s)$

Si descrivono i risultati ottenuti assumendo che i dati siano i valori della funzione reale:

$$32) F(s) = atan(1/s) \quad f(t) = \sin t/t$$

La funzione ha un punto di discontinuità, $s = 0$.

L'ascissa di convergenza è $\alpha_f = 0$; il semipiano di convergenza è quello delle ascisse positive. **Eseguiamo una serie di test in cui, fissato il numero dei nodi di costruzione delle spline, valutiamo le funzioni su intervalli di ampiezza variabile dell'asse delle ascisse.**

Test di approssimazione

Sia $n = 10$; i campioni appartengono all'intervallo $[1, 14.5]$, e sono distribuiti con passo di discretizzazione $h = 1.5$:

$$x_0 = 1, \quad x_i = 1 + i * h, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Sia, inoltre, $nv = 20$; costruiamo la spline s_{Lt} nell'intervallo di valutazione: $[1, 39]$, in corrispondenza dei punti distribuiti con passo di discretizzazione $hv = 2$.

Come si può dedurre dall'andamento delle curve descritte, l'errore assoluto, commesso nell'approssimazione della trasformata di Laplace mediante la spline della Definizione 2.7, tende a zero al crescere del numero dei punti di valutazione esterni all'intervallo di costruzione. Al contrario, lo stesso errore prodotto dalle spline polinomiali con diverse condizioni al contorno cresce notevolmente, per $x \rightarrow \infty$.

I risultati illustrati dai grafici trovano riscontro nei valori degli errori assoluti descritti nel §3.2.7. In particolare si osserva le spline polinomiali presentano un andamento decrescente all'infinito, assumono, però, valori negativi, al crescere dei valori della variabile indipendente x .

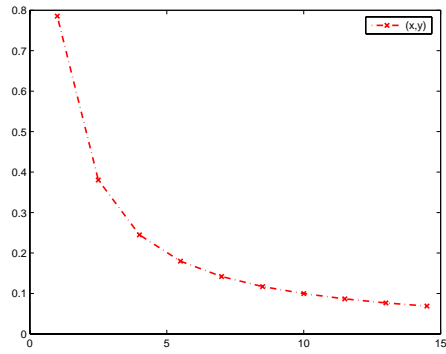


Figura 3.67: **Dati: $(x, F(x))$**

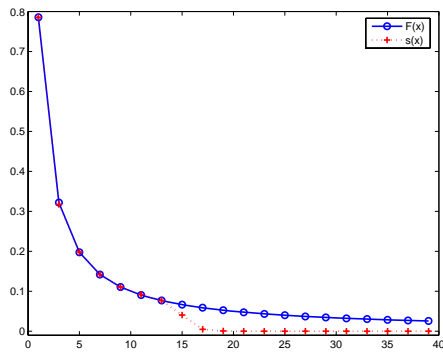


Figura 3.68: **Approssimazione della F con s_{Lt} in $[1, 39]$**

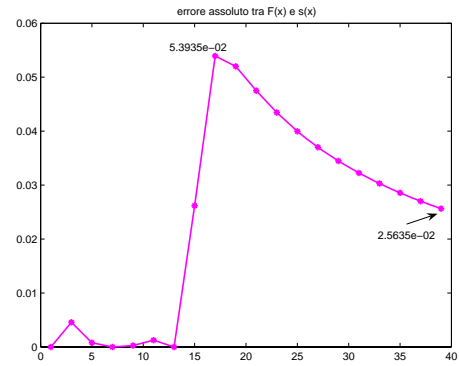


Figura 3.69: **Errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$**

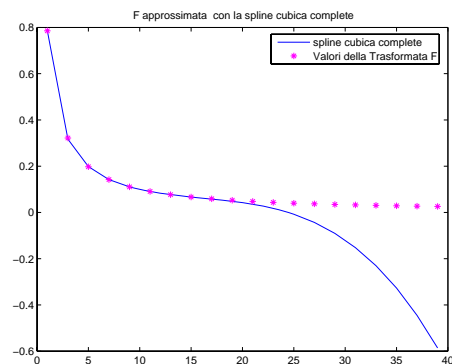


Figura 3.70: Ricostruzione con spline interpolante *complete*, $nv = 20$

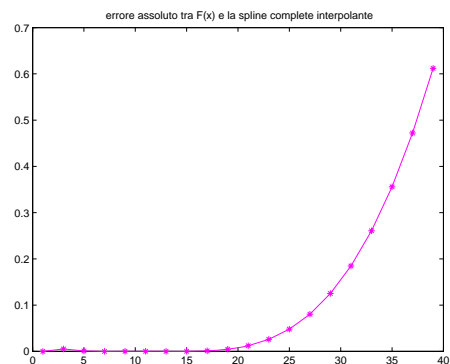


Figura 3.71: Errore assoluto tra la spline cubica *complete* e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

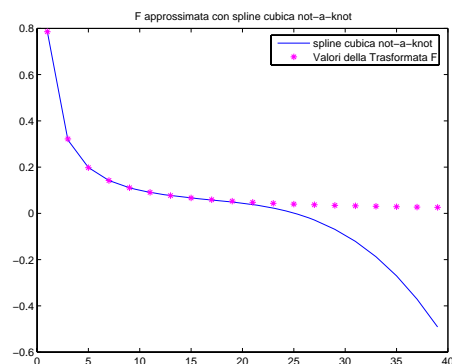


Figura 3.72: Ricostruzione con spline interpolante *not-a-knot*, $nv = 20$

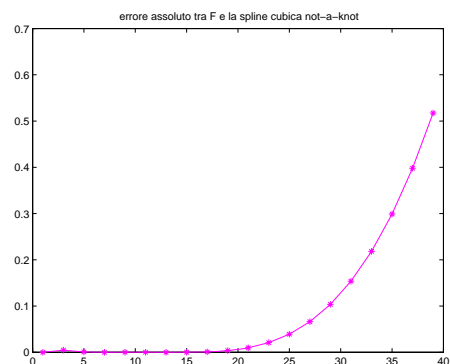


Figura 3.73: Errore assoluto tra la spline cubica *not-a-knot* e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

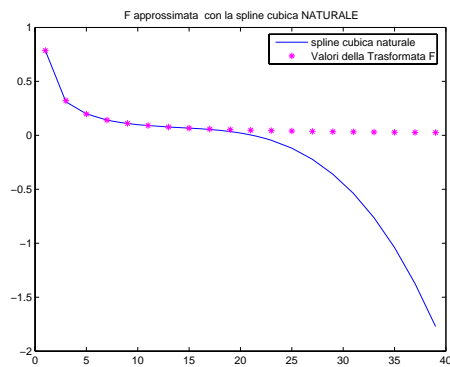


Figura 3.74: Ricostruzione con spline interpolante *naturale*, $nv = 20$

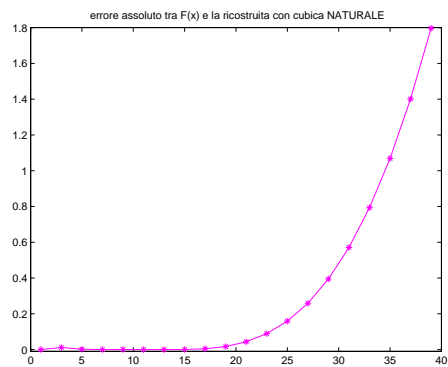


Figura 3.75: Errore assoluto tra la spline cubica *naturale* e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

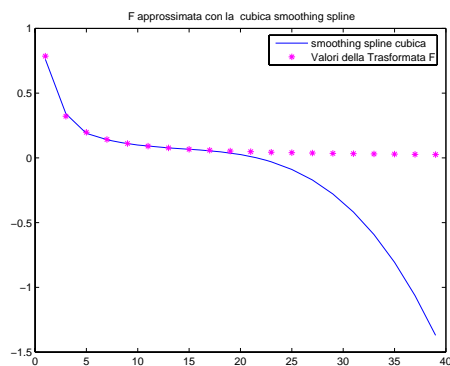


Figura 3.76: Ricostruzione con la spline cubica *smoothing*, $nv = 20$

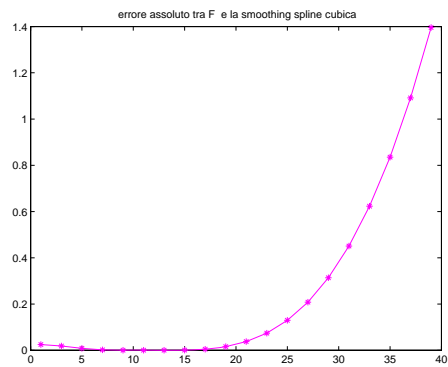


Figura 3.77: Errore assoluto tra la spline cubica *smoothing* e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 20$

Dalle curve descritte in Fig. 3.78-3.87 si osserva come, aumentando l'ampiezza dell'intervallo aumenta anche la distanza tra le polinomiali e la funzione Trasformata di Laplace. Al contrario, approssimando quest'ultima con la spline generalizzata, l'errore assoluto raggiunge un errore massimo in un intorno del punto di raccordo, il nodo x_n , a partire dal quale decresce e tende a zero all'infinito. Non si riportano le curve ottenute approssimando la trasformata su intervalli di ampiezza maggiore, per i quali si riscontrano risultati analoghi; i valori numerici dell'errore di fitting sono, però, descritti in Tabella 3.4.

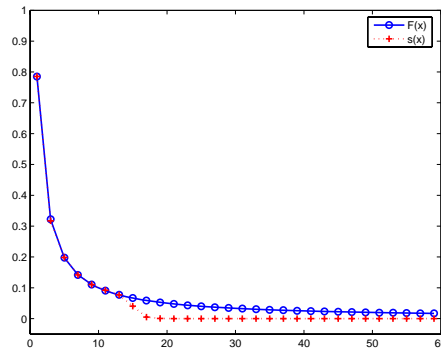


Figura 3.78: **Approssimazione della F con s_{Lt} , $nv = 30$**

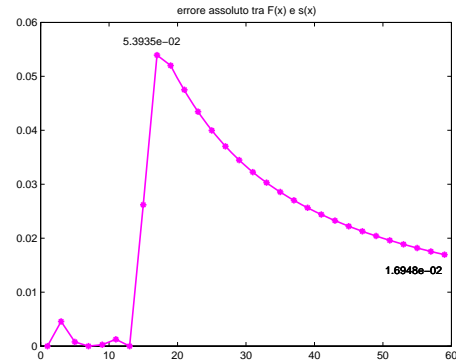


Figura 3.79: **Errore assoluto tra la spline s_{Lt} e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$**

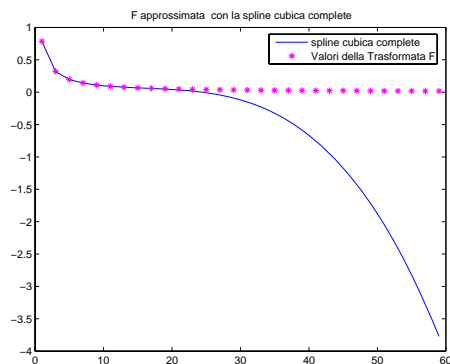


Figura 3.80: Ricostruzione con spline interpolante *complete*, $nv = 30$

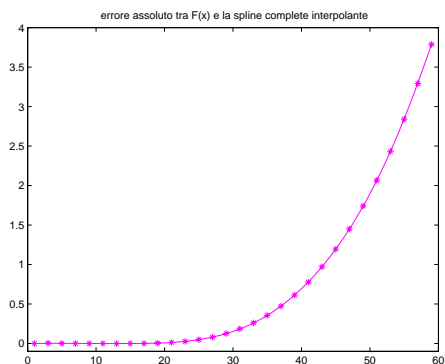


Figura 3.81: Errore assoluto tra la spline cubica *complete* e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

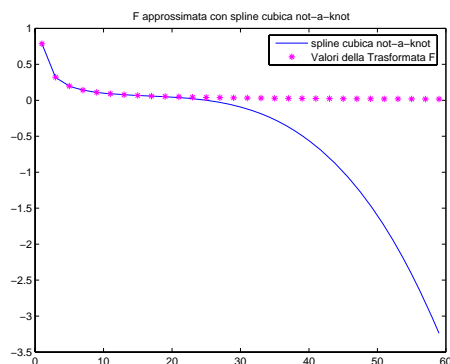


Figura 3.82: Ricostruzione con spline interpolante *not-a-knot*, $nv = 30$

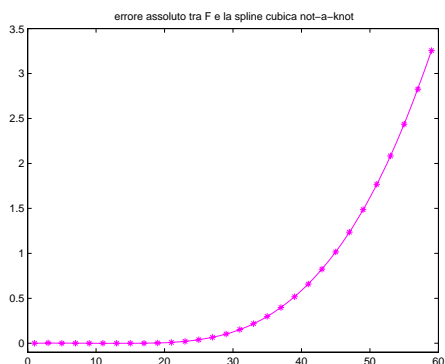


Figura 3.83: Errore assoluto tra la spline cubica *not-a-knot* e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

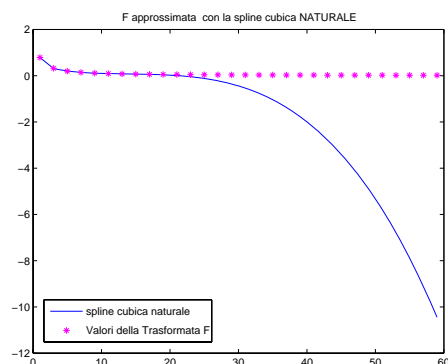


Figura 3.84: Ricostruzione con spline interpolante *naturale*, $nv = 30$

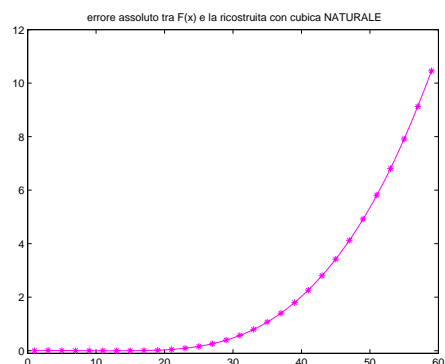


Figura 3.85: Errore assoluto tra la spline cubica *naturale* e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

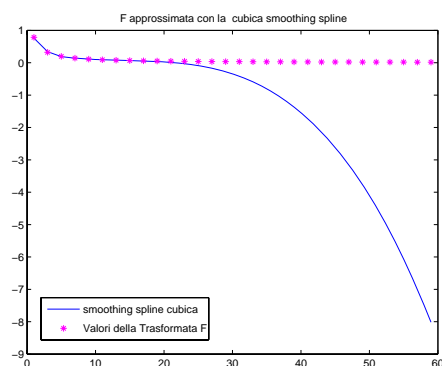


Figura 3.86: Ricostruzione con la spline cubica *smoothing*, $nv = 30$

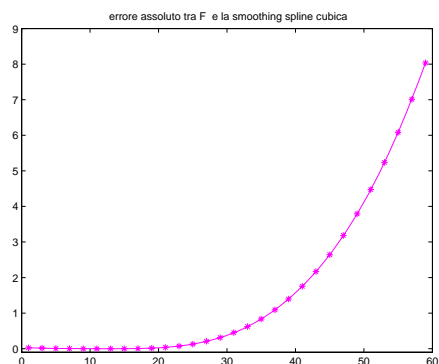


Figura 3.87: Errore assoluto tra la spline cubica *smoothing* e la funzione Trasformata di Laplace, $nv = 30$

3.2.7 Accuratezza dei risultati

Le tabelle seguenti descrivono l'accuratezza delle approssimazioni prodotte per la Trasformata

$$32) F(s) = \operatorname{atan}(1/s) \quad f(t) = \sin t/t,$$

attraverso la spline s_{Lt} e quelle implementate dalle funzioni `matlab`.

Riportiamo, in Tabella 3.4, i valori di $E_{fitting}$. In particolare, abbiamo costruito le spline interpolanti 10 nodi e valutate su intervalli dell'asse reale di ampiezza variabile, al crescere del numero dei punti di valutazione.

$n = 10, h = 1.5$					
nv	s_{Lt}	<i>complete</i>	<i>not-a-knot</i>	<i>naturale</i>	<i>smoothing</i>
20	5.3935e-02	6.1202e-01	5.1728e-01	1.7969e+00	1.3960e+00
30	5.3935e-02	3.7884e+00	3.2550e+00	1.0461e+01	8.0341e+00
40	5.3935e-02	1.1766e+01	1.0180e+01	3.1601e+01	2.4193e+01

Tabella 3.4: $E_{fitting}$

Conclusioni

I valori in Tabella 3.4 confermano quanto osservato sull'andamento delle funzioni spline all'infinito: le spline polinomiali si allontanano notevolmente della Trasformata al crescere dell'ampiezza dell'intervallo di valutazione, ovvero per $x \rightarrow \infty$. Inoltre, l'errore assoluto commesso nell'approssimazione di F con s_{Lt} , raggiunge un picco in corrispondenza del punto di raccordo, per poi tendere a zero all'infinito.

Capitolo 4

Esperimenti numerici: caso complesso

4.1 Introduzione

Nel presente capitolo descriviamo le esperienze effettuate su funzioni Trasformate di Laplace complesse, al fine di determinare un modello approssimante, analogo a quello definito nel caso reale, secondo le dissertazioni del §2.5.

Assegnato un insieme di valori complessi, sono state tracciate le *superfici* con cui si rappresentano la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di funzioni complesse; queste ultime sono state tratte dal database del §3.1. Naturalmente, anche per il caso complesso, la prima fase di testing è stata realizzata su dati *sintetici*, cioè abbiamo supposto di conoscere l'espressione analitica della funzione Trasformata di Laplace F , di cui i campioni sono le valutazioni in corrispondenza di un insieme arbitrario di nodi, comunque distribuiti su *griglie rettangolari* del piano cartesiano xy . Ciascuna delle superfici che rappresentano in tre dimensioni le funzioni $real(F)$ e $imag(F)$, è stata studiata *localmente*, ovvero distinguendo la regione di convergenza al "finito" da una assumibile come "intorno dell'infinito". Abbiamo, dunque, confrontato l'andamento di queste due funzioni reali con quello di alcuni modelli di fitting noti per l'interpolazione *bidimensionale*, naturali generalizzazioni in due dimensioni delle spline polinomiali unidimensionali, utilizzate nell'approssimazione di dati discreti, nel caso reale. Per ciascuna delle approssimazioni locali prodotte è stato descritto il *piano dell'errore assoluto*, luogo dei punti ottenuti stimando l'errore assoluto puntuale, prodotto dai

diversi modelli.

Osservazioni sull'approssimazione all'infinito

Soffermiamo l'attenzione su alcune osservazioni relative all'andamento della Trasformata di Laplace complessa in corrispondenza di punti *all'infinito*, ovvero $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z| \rightarrow \infty$.

Sia A un aperto illimitato del campo complesso. Ricordiamo che, indicato con $\mathcal{I}(l)$ un intorno di $l \in \mathbb{C}$ e con $\mathcal{I}(\infty)$ un intorno di infinito, cioè l'insieme dei punti esterni ad un cerchio di centro l'origine, vale la definizione di *convergenza all'infinito*:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} F(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall I \in \mathcal{I}(l) \quad \exists J \in \mathcal{I}(\infty) : \forall z \in A, z \in J, \quad F(z) \in I$$

che può anche esprimersi come:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists R > 0 : \forall z \in A, |z| > R, \quad |F(z) - l| < \epsilon \quad (4.1)$$

In particolare $R = R_\epsilon$, cioè dipende da ϵ e le funzioni Trasformate di Laplace soddisfano la convergenza all'infinito, con $l = 0$.

Vediamo quali regioni del campo complesso possono essere riferite, almeno numericamente, come *intorni di infinito*.

In generale, posto $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $l = \lambda + i\mu$, se $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, si ha:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = l \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \lambda \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = \mu \end{cases}$$

Dunque, in generale, se sono vere le condizioni:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists R_1 > 0, \text{ tale che se } |(x, y)| = \|(x, y)\|_2 = |z| > R_1, \text{ allora } |u(x, y)| < \epsilon/2$$

e

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists R_2 > 0 \text{ tale che se } |(x, y)| = \|(x, y)\|_2 = |z| > R_2, \text{ allora } |v(x, y)| < \epsilon/2,$$

troviamo un

$$R = \max\{R_1, R_2\}$$

tale che per tutti i punti z , con $|z| > R$:

$$|F(z)| \leq |u(x, y)| + |v(x, y)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

cioè vale la (4.1), con $l = 0$. Cioè si individua una regione dello spazio in cui il comportamento della funzione F è come quello asintotico, all'infinito, per cui ha senso studiare l'approssimazione in quella regione in termini di approssimazione *all'infinito*.

Ad esempio, per le funzioni testate, abbiamo assunto, come intorno di infinito, la regione del capo complesso in cui le funzioni reali u e v assumono valori dell'ordine di:

$$0 < |u(x, y)| < \epsilon_1 \leq 10^{-4} \quad \text{e} \quad 0 < |v(x, y)| < \epsilon_2 \leq 10^{-4}.$$

Fissato $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} \leq 10^{-4}$, esisterà, allora un $R > 0$ tale che, per ogni $|z| > R$ si ha

$$|F(z)| < 2 \cdot 10^{-4}$$

In questa regione abbiamo studiato l'andamento della Trasformata e dei modelli approssimanti noti, e dedotta, tra essi, la funzione che realizza la *migliore approssimazione* della Trasformata di Laplace *all'infinito*.

4.1.1 Dettagli implementativi

Descriviamo, in questo paragrafo, le approssimazioni determinate per le superfici con cui si rappresentano la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria di alcune delle funzioni Trasformata di Laplace descritte nel nostro database, assumendo che la variabile indipendente sia complessa.

I test sono stati realizzati implementando alcune funzioni **matlab**.

Tra queste ultime è stata testata la funzione **griddata** che, con l'opzione *v4*, realizza la *smooth piecewise polynomial interpolation*, implementando il metodo descritto in [35], in cui le superfici sono ottenute attraverso combinazioni lineari di funzioni di Green dell'operatore biarmonico, centrate nei nodi:

$$\sum_{j=1}^n a_j \phi_m(r),$$

con ϕ_m funzione biarmonica di Green di dimensione m ¹. In Appendice B si riportano alcuni **approfondimenti sulle funzioni di Green e sulle spline biarmoniche**.

Sul modello dell'implementazione della funzione `griddata`, abbiamo implementato la combinazione di thin-plate splines

$$\phi(r) = r^2 \ln(r),$$

per testarne l'accuratezza in relazione al nostro problema di approssimazione.

I risultati prodotti sono stati confrontati con quelli ottenuti implementando ed eseguendo, negli stessi casi, la spline biarmonica, combinazione delle funzioni di Green del tipo

$$\phi(r) = r^2 (\ln(r) - 1);$$

essa ha prodotto risultati ugualmente accurati, al finito, rispetto alla spline biarmonica, combinazione di *thin-plate splines*. Nell'intorno di infinito, invece, quest'ultima è risultata più accurata.

La rappresentazione grafica della funzione complessa F è stata realizzata mediante la visualizzazione delle superfici corrispondenti alle sue coordinate cartesiane, parte reale, u , e coefficiente dell'immaginario, v . I grafici `matlab` sono stati realizzati dapprima creando una griglia circolare² che rappresenti la discretizzazione di un intorno di un particolare punto complesso. Calcolando, in corrispondenza dei punti della griglia, i valori della funzione, le coppie $(z, \tilde{F}(z))$, con $\tilde{F}(z) = u(x, y)$ oppure $\tilde{F}(z) = v(x, y)$, sono state

¹In particolare, posto $r = \|(x, y) - (x_j, y_j)\|$ e $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, norma Euclidea, per

$$\begin{aligned} m = 1 & \quad \phi_1(r) = r^3 = \|x - x_j\|^3 = |x - x_j|^3 \\ m = 2 & \quad \phi_2(r) = r^2 (\ln(r) - 1) = \|(x, y) - (x_j, y_j)\|^2 [\ln(\|(x, y) - (x_j, y_j)\|) - 1] \end{aligned}$$

²Una griglia circolare di centro z_0 e raggio r è costruita mediante la funzione `matlab cplxgrid(·)`, in particolare come:

$$z = z_0 + r * \text{cplxgrid}(m)$$

con m parametro da cui dipende la suddivisione della griglia stessa, dunque la densità di punti appartenenti all'intorno.

assunte come dati del nostro problema.

Al fine di confrontare l'interpolazione mediante *spline biarmonica*, combinazione lineare di thin-plate splines, con l'interpolazione spline *polinomiale*, in particolare *bicubica*, illustriamo i risultati ottenuti utilizzando una *griglia rettangolare* di dati, piuttosto che circolare. In effetti le funzioni `matlab` che implementano spline *polinomiali* lavorano su griglie di questo tipo. Stimiamo, poi, tra tutte, quale spline fornisce l'approssimazione più accurata della funzione Trasformata, nella regione di convergenza.

A tal fine osserviamo che, sull'andamento della funzione Trasformata in prossimità del piano individuato dall'ascissa di convergenza, incide la presenza delle singolarità e, quindi, l'andamento della funzione nella regione in cui l'integrale non converge. Determineremo, allora, anche la spline che realizza la *migliore* approssimazione della funzione F nella regione in cui cadono le sue singolarità.

4.1.2 $F(s) = 1/s(s-1)$

Confrontiamo le superfici con cui si rappresentano la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria della funzione complessa

$$8) F(s) = \frac{1}{s(s-1)} \quad f(t) = e^t - 1$$

con le approssimazioni ottenute attraverso le funzioni implementate dal `matlab`.

Test matlab: combinazione di thin-plate splines

La funzione complessa 8) presenta due singolarità *reali*, nei punti $s = 0$ e $s = 1$. Il piano che individua la regione di convergenza avrà equazione $Re(s) \geq 1$. Siano assegnati i dati, $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Studiamo separatamente il problema di interpolazione dei punti $(x, y, u(x, y))$ e dei punti $(x, y, v(x, y))$, al variare delle coppie di coordinate (x, y) ; visualizziamo l'andamento delle superfici, distinguendo le approssimazioni prodotte nella regione di convergenza, al finito ed all'infinito. In effetti, sebbene non riportati per brevità, sono stati realizzati anche i confronti sulle superfici con cui si rappresentano u e v nella regione in cui cadono le singolarità. In effetti, in quest'ultima, la funzione non è, secondo la definizione, una Trasformata di Laplace; in ogni caso

si è osservato che la presenza delle singolarità incide sull'andamento della Trasformata nella sua regione di convergenza, in particolare in prossimità del piano individuato dall'ascissa di convergenza, e quale, tra i modelli testati, riesce a fornire per essa l'approssimazione più accurata in quella regione.

I risultati relativi sono riportati nelle tabelle del paragrafo seguente.

In Fig. 4.1 è descritta la superficie interpolante i dati. In Fig. 4.2 si riporta la superficie che congiunge i valori della funzione u , corrispondenti ad un insieme di dati più ampio, contenente i nodi di costruzione. Proviamo, tra i modelli testati, quale riesce a fornire un'approssimazione accurata della Trasformata di Laplace **nella regione di convergenza** della funzione. La Fig. 4.3 descrive la superficie ricostruita e, dunque, le approssimazioni dei valori della u , attraverso smoothing spline biarmonica. Dal *piano dell'errore assoluto*, in Fig. 4.4, si può dedurre l'accuratezza fornita dalla spline biarmonica. Dalle superfici descritte nelle figure 4.1-4.4 l'approssimazione si può ritenere sufficientemente accurata, a meno della regione in prossimità delle singolarità della F . Possiamo dedurre, da questo andamento, che, in **prossimità del piano che delimita la regione di convergenza, l'andamento della funzione è influenzato dalla presenza delle singolarità**.

Test sulla parte reale

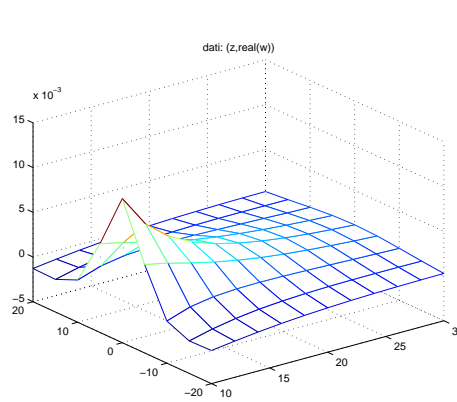


Figura 4.1: Dati: $(z, \text{real}(w))$

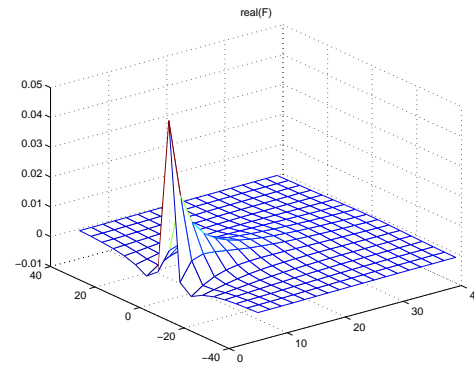


Figura 4.2: Parte reale della funzione Trasformata di Laplace, nella regione di convergenza

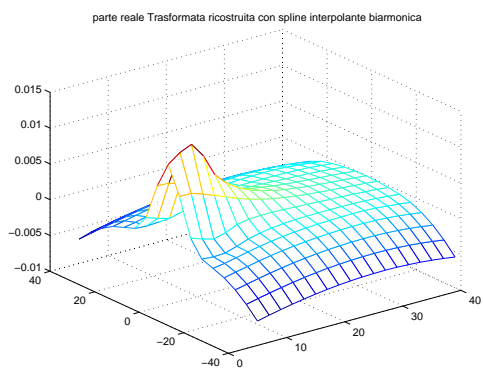


Figura 4.3: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline biarmonica

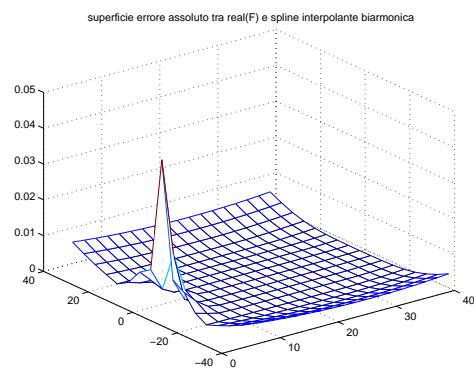


Figura 4.4: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, e la funzione $u(x, y)$

Risultati analoghi si riscontrano studiando il comportamento della parte immaginaria della funzione e della sua ricostruita attraverso spline biarmonica.

Test sul coefficiente dell'immaginario

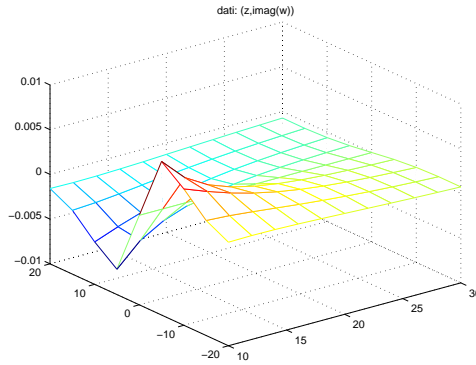


Figura 4.5: Dati: $(z, \text{imag}(w))$

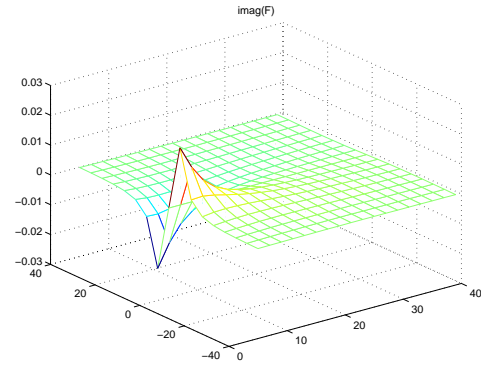


Figura 4.6: Coefficiente dell'immaginario della funzione Trasformata di Laplace, nella regione di convergenza

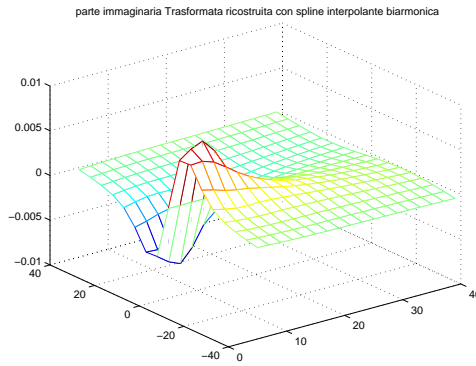


Figura 4.7: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline biarmonica

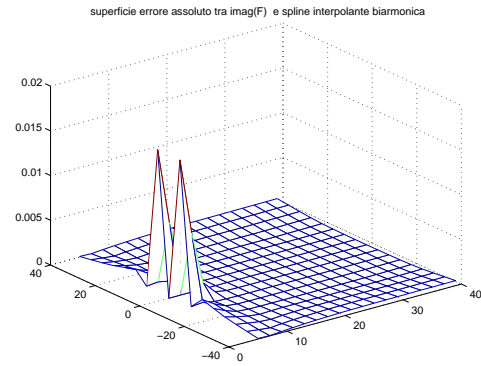


Figura 4.8: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, e la funzione $v(x, y)$

Illustriamo, inoltre, i risultati ottenuti in un intorno di infinito.

Test sulla parte reale

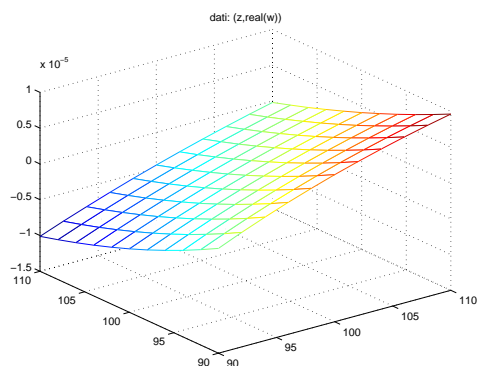


Figura 4.9: Dati: $(z, \text{real}(w))$

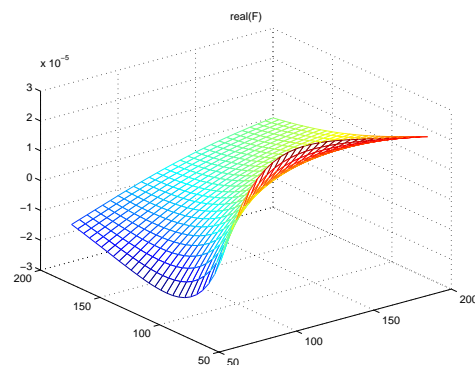


Figura 4.10: Parte reale della funzione Trasformata di Laplace, in un *intorno di infinito*

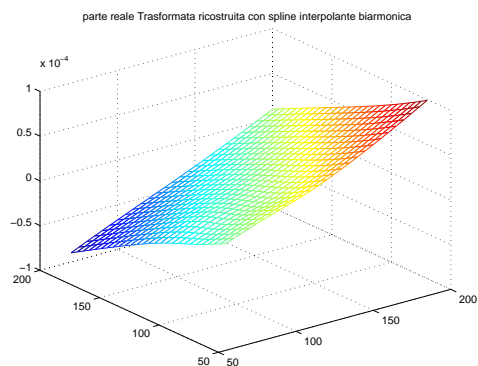


Figura 4.11: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline biarmonica

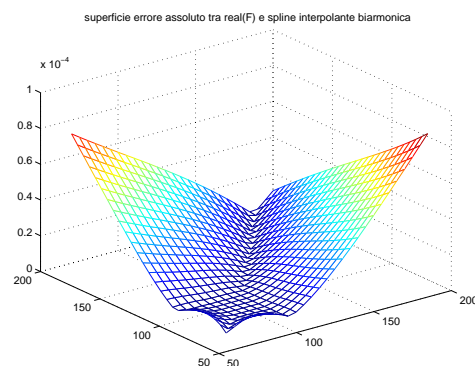


Figura 4.12: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

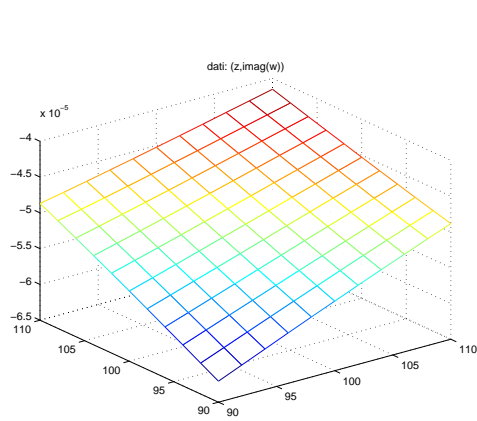


Figura 4.13: Dati: $(z, \text{imag}(w))$

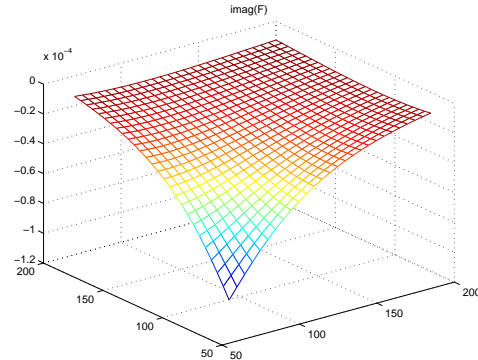


Figura 4.14: Coefficiente dell'immaginario della funzione Trasformata di Laplace, in un intorno di *infinito*

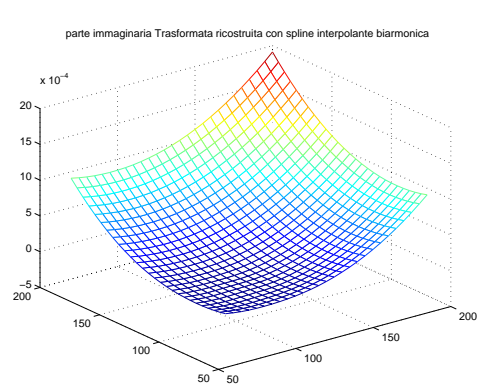


Figura 4.15: Ricostruzione in un intorno di *infinito*, con spline biarmonica

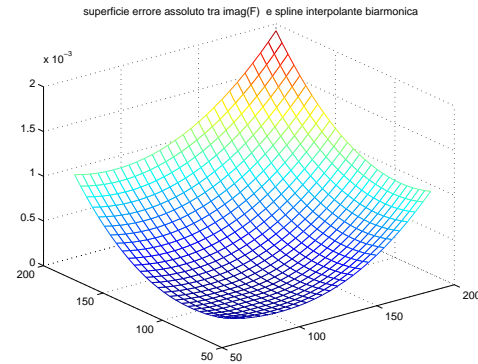


Figura 4.16: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un intorno di *infinito*, e la funzione $v(x, y)$

Test matlab: csape, csapi, interp2

Determiniamo, ora, le approssimazioni delle superfici che rappresentano parte reale e coefficiente dell'immaginario, mediante splines bicubiche, ottenute implementando le funzioni matlab: `csape`, `csapi` e `interp2`. Le prime,

già descritte ed utilizzate per i test relativi al caso reale, calcolano, interpolando dati distribuiti su griglie rettangolari, le *spline bicubiche complete* e *not-a-knot*, rispettivamente. La funzione `interp2` è, invece, specifica per l'interpolazione bidimensionale; essa costruisce la *spline bicubica interpolante not-a-knot*, calcolando i valori incogniti come combinazione dei valori, pretabulati, dei quattro punti più vicini. In effetti i risultati prodotti sono confrontabili con quelli della funzione `csapi`, dalla quale si distingue per il calcolo (di tipo *table lookup*) delle approssimazioni, pertanto saranno omessi. Sottolineiamo però, che quest'ultima, con la scelta di opportune opzioni, offre la possibilità di implementare ulteriori modelli interpolanti, ad esempio *interpolazione bilineare*, *interpolazione bicubica*, oltre che interpolazione di tipo spline.

Test sulla parte reale

Le figure 4.17-4.20 fanno riferimento all'andamento della funzione u nella **regione di convergenza**, al finito, mentre le 4.25-4.28 al comportamento per $|z| \rightarrow \infty$.

Test sulla parte reale

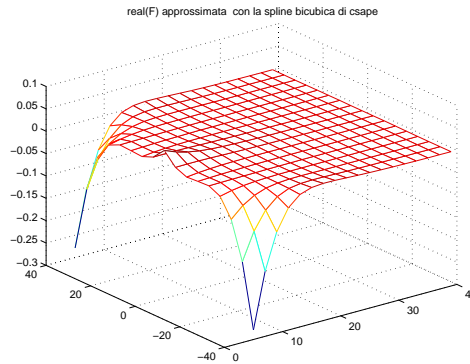


Figura 4.17: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica complete

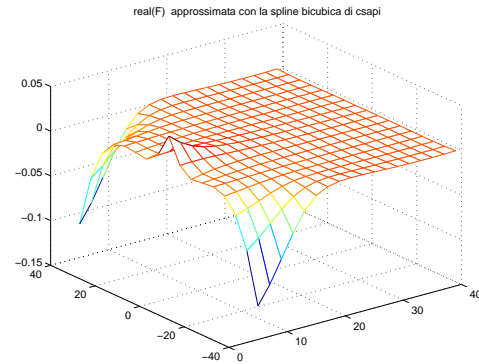


Figura 4.18: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica not-a-knot

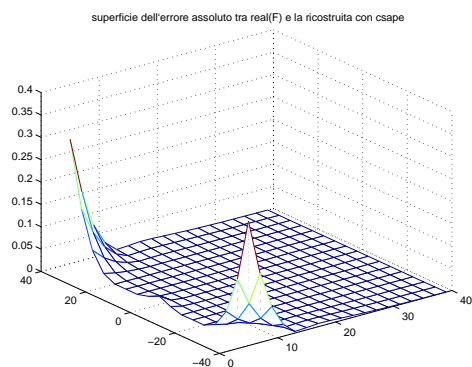


Figura 4.19: **Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica complete, e la funzione $u(x, y)$**

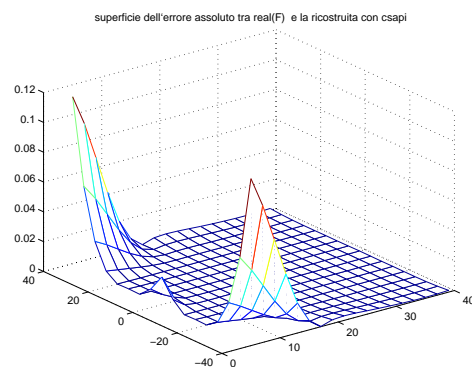


Figura 4.20: **Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $u(x, y)$**

Confrontando le Fig. 4.19-4.20 con la Fig. 4.4, si riscontra un massimo errore assoluto di almeno un ordine di grandezza maggiore rispetto a quello commesso approssimando u mediante spline biarmonica, come confermato dai valori in Tabella 4.3, del paragrafo 4.1.3.

Test sul coefficiente dell'immaginario

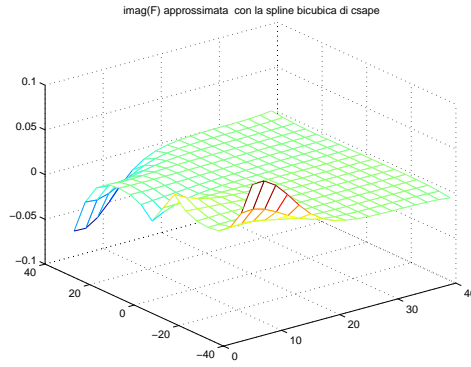


Figura 4.21: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica complete

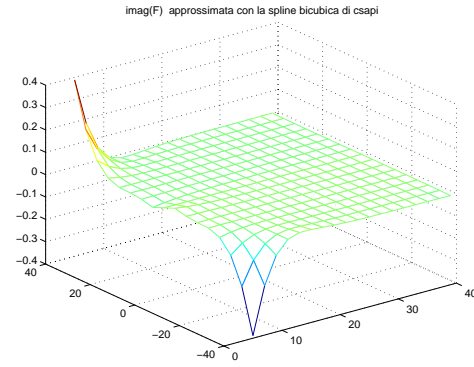


Figura 4.22: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica not-a-knot

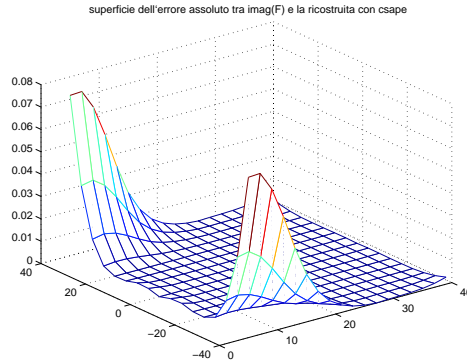


Figura 4.23: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica complete, e la funzione $v(x, y)$

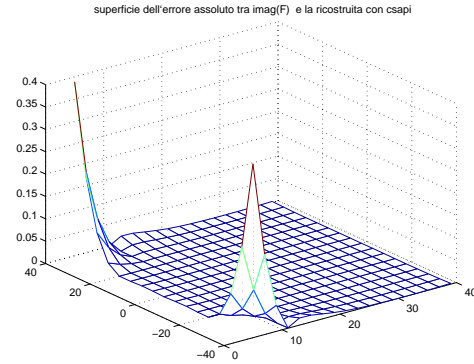


Figura 4.24: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $v(x, y)$

Test sulla parte reale

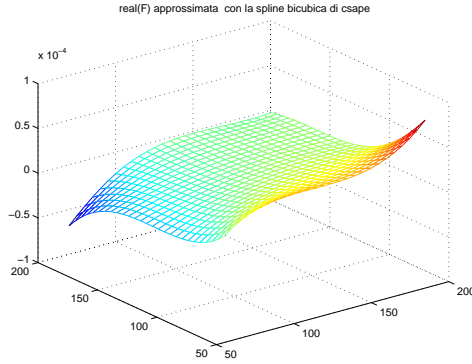


Figura 4.25: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica complete

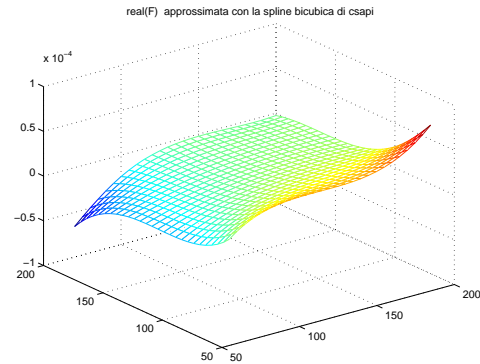


Figura 4.26: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica not-a-knot

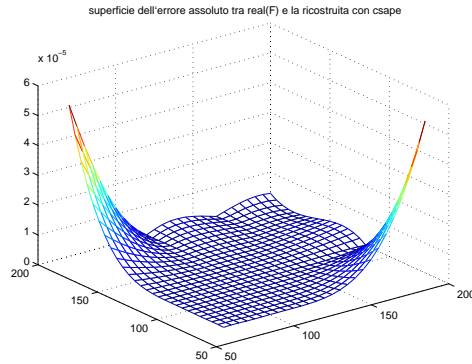


Figura 4.27: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica complete, e la funzione $u(x, y)$

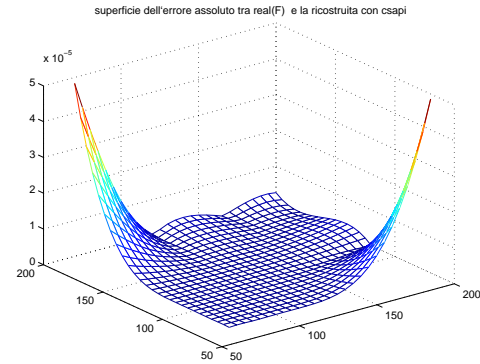


Figura 4.28: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $u(x, y)$

Confrontando le Fig. 4.27-4.28 con la Fig. 4.12, osserviamo che le superfici dell'errore assoluto commesso dalle bicubiche, sia not-a-knot che complete, testimoniano un'approssimazione più accurata da parte di queste ultime, rispetto alla spline biarmonica. In effetti, gli ordini di grandezza dei valori numerici riportati in Tabella 4.5, del paragrafo 4.1.3 sono confrontabili. Analoghe considerazioni valgono per le approssimazioni della funzione v .

Test sul coefficiente dell'immaginario

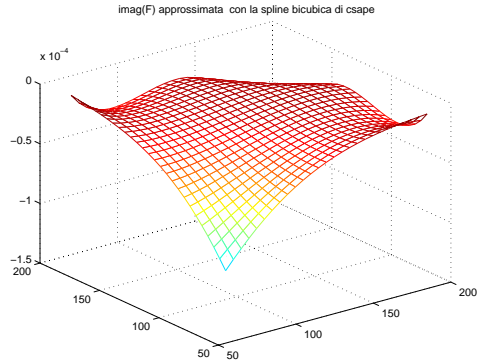


Figura 4.29: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica complete

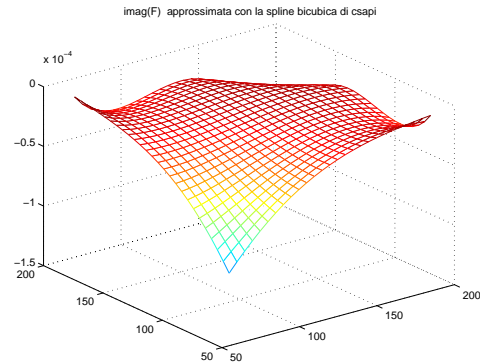


Figura 4.30: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica not-a-knot

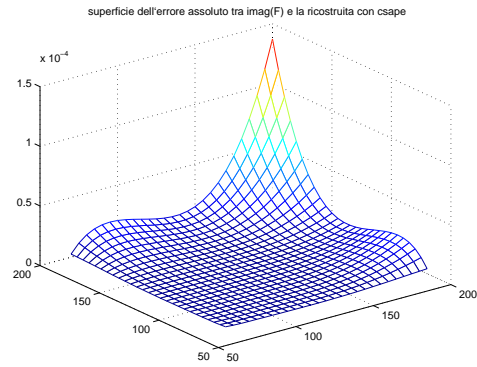


Figura 4.31: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica complete, e la funzione $v(x, y)$

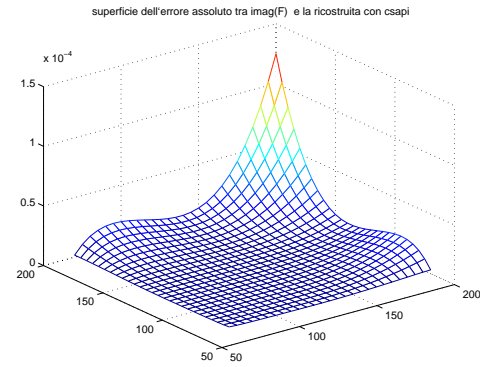


Figura 4.32: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $v(x, y)$

Considerazioni

Confrontando le superfici degli errori ed il loro ordine di grandezza, riportati nelle tabelle del paragrafo seguente, definiamo quale spline fornisce l'approssimazione più accurata delle funzioni u e v , dunque della F , regione per regione. La spline biarmonica risulta più accurata rispetto alle polinomiali, nella regione in cui cadono le singolarità. In effetti l'errore assoluto prodotto dalle splines polinomiali cresce notevolmente rispetto a quello prodotto dalla combinazione di splines biarmoniche; in particolare, poi, l'errore commesso mediante spline bicubica *not-a-knot* diventa addirittura di due ordini di grandezza maggiore rispetto a quello ottenuto approssimando le funzioni u e v con spline biarmonica e di un ordine di grandezza maggiore rispetto a quello commesso dalla spline complete. Concentrando l'attenzione sulla regione di convergenza, si osserva che, al finito le approssimazioni prodotte dalla spline biarmonica e dalle polinomiali sono equivalentemente accurate, in quanto gli errori prodotti hanno gli stessi ordini di grandezza; all'infinito, invece, le spline polinomiali sembrano fornire un'approssimazione più accurata, con un errore assoluto di un ordine di grandezza minore rispetto alla biarmonica; tuttavia, anche all'infinito, quest'ultima può ritenersi una "buona" approssimazione della Trasformata, se si accetta un'approssimazione corretta fino ad al più la quarta cifra decimale. Si può concludere, dunque, da questa prima serie di confronti, che la spline biarmonica, fornisce un'approssimazione accurata della funzione Trasformata di Laplace, nella sua regione di convergenza. Quando, però, i nodi di costruzione appartengono ad una regione sufficientemente lontana dal piano individuato dall'ascissa di convergenza, una maggiore accuratezza è garantita dalle splines bicubiche interpolanti, complete o *not-a-knot*; inoltre, tra queste, vale la pena scegliere la complete, con la quale anche al finito si approssima la funzione con un numero di cifre significative maggiore rispetto alla *not-a-knot*. Prima di stabilire, allora, quale spline scegliere per definire l'approssimazione *globale* della trasformata in esame, confrontiamo le ricostruzioni già determinate, con quelle che si ottengono, in corrispondenza degli stessi dati, mediante spline *bicubica naturale interpolante*.

Test matlab: spline bicubica naturale interpolante

Seguono i risultati prodotti da `csape` con l'opzione `'variational'`, che implementa la **spline bicubica naturale interpolante**.

In particolare, le Fig. 4.33 e 4.34 fanno riferimento alle ricostruzioni di $u(x, y)$, ottenute nella regione di convergenza, al finito, mentre le Fig. 4.37 e 4.38 nell'intorno di infinito.

Test sulla parte reale

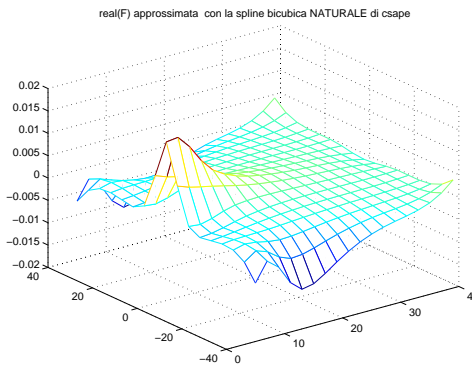


Figura 4.33: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale

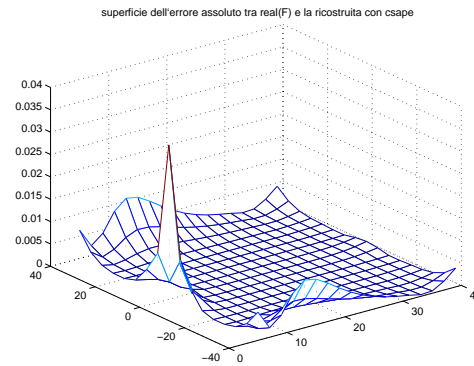


Figura 4.34: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

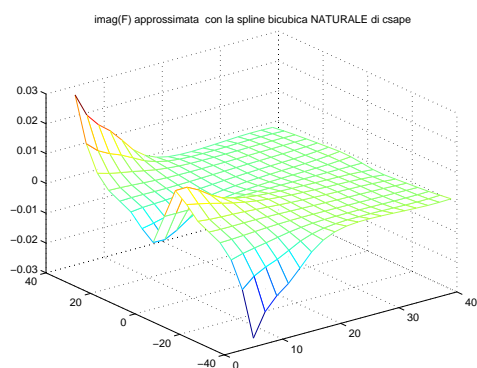


Figura 4.35: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale

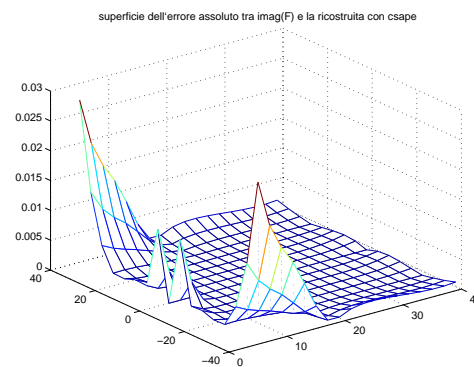


Figura 4.36: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale e la funzione $v(x, y)$

Test sulla parte reale

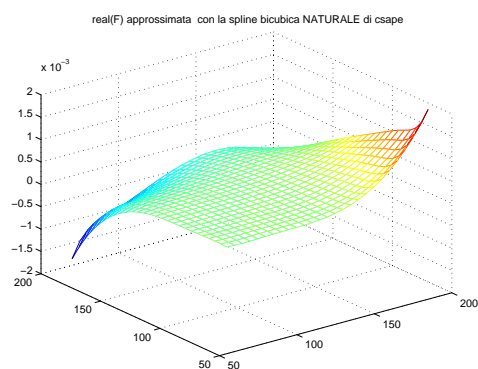


Figura 4.37: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale

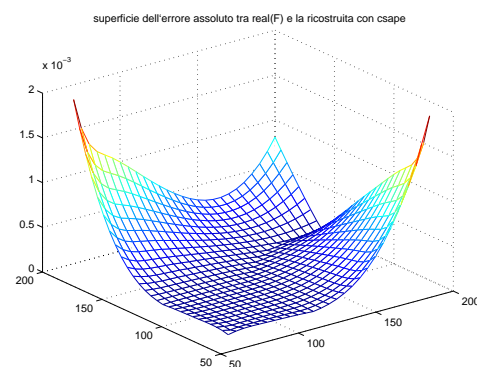


Figura 4.38: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

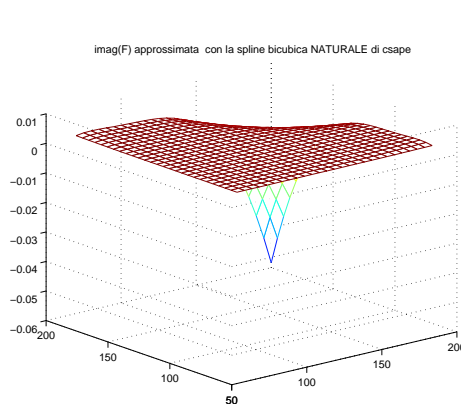


Figura 4.39: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale

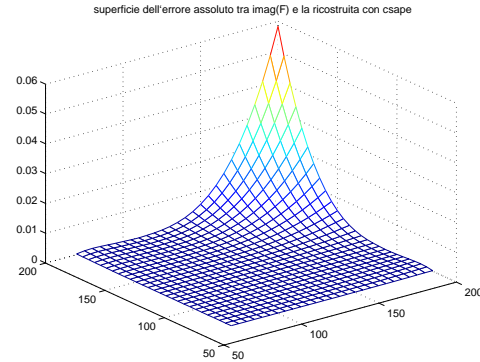


Figura 4.40: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale e la funzione $v(x, y)$

Considerazioni

La spline bicubica naturale non riesce a fornire una approssimazione accurata più della biarmonica al finito o delle polinomiali all'infinito.

Conclusioni

La spline che approssima con maggiore accuratezza l'andamento della funzione Trasformata di Laplace al finito, nella regione di convergenza (così come in quella in cui cadono le singolarità) è la **biarmonica**.

Al contrario, all'infinito, le spline polinomiali risultano più accurate nell'approssimazione, rispetto alla biarmonica. In particolare, tra le tre testate, (complete, not-a-knot e naturale), la **complete** produce un errore medio inferiore rispetto alle altre approssimazioni polinomiali, non solo *all'infinito*, ma anche nella regione di convergenza, non lontano dal piano individuato dall'ascissa di convergenza. Le conclusioni dedotte sono confermate dai risultati riportati nelle tabelle nel paragrafo seguente.

4.1.3 Accuratezza dei risultati

Le tabelle seguenti descrivono l'**errore assoluto medio** (MAE-*mean absolute error*) [26] ed il **massimo modulo dell'errore**, con cui si stima la bontà delle approssimazioni prodotte attraverso i diversi modelli di spline interpolante e, dunque, attraverso le diverse funzioni `matlab` testate. Le superfici degli errori, descritte nelle figure precedenti nei vari casi e nelle diverse regioni in cui abbiamo osservato il comportamento della funzione complessa, sono state realizzate calcolando il modulo della differenza tra le superfici relative alle ricostruzioni e quelle con cui si descrive l'andamento delle parti, reale e coefficiente dell'immaginario, della funzione Trasformata di Laplace.

Le tabelle 4.1, 4.3 e 4.5 fanno riferimento alle ricostruzioni della parte reale della funzione complessa 8), le 4.2, 4.4 e 4.6 alla ricostruzione della parte immaginaria.

Nella **regione in cui cadono le singolarità** le spline sono state costruite interpolando i nodi appartenenti alla griglia rettangolare individuata dagli intervalli

$$x \in [-4 : 0.8 : 4] \quad \text{e} \quad y \in [-2 : 0.8 : 2];$$

essa risulta costituita, dunque, da $11 \times 6 = 66$ punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 11$ e $j = 1, \dots, 6$. Le spline sono state, poi, valutate in corrispondenza di nodi z_{2ij} appartenenti alla griglia individuata dagli intervalli

$$x2 \in [-6 : 0.8 : 6] \quad \text{e} \quad y2 \in [-5 : 0.8 : 5]$$

e sono $16 \times 13 = 208$.

Il valore superiore a quello atteso è dovuto all'esclusione, dal calcolo degli errori, e, dunque, dalla loro media, dei punti in cui le funzioni assumono valore `inf`, negli intorni delle singolarità della Trasformata.

Ricostruzioni della parte reale

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		2.5097	0.0494
spline cubica complete	csape	44.1300	2.5401
spline cubica naturale	csape	16.9077	0.7105
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	601.3372	14.5639

Tabella 4.1: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno delle singolarità**

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		1.6445	0.0338
spline cubica complete	csape	196.1087	7.0482
spline cubica naturale	csape	35.3134	1.1463
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	328.1118	17.7058

Tabella 4.2: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno delle singolarità**

Nella **regione di convergenza** le spline sono state costruite sulla griglia rettangolare individuata dagli intervalli:

$$x \in [10 : 2 : 30] \quad \text{e} \quad y \in [-20 : 5 : 20],$$

costituita, dunque, da $11 \times 9 = 99$ punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 11$ e $j = 1, \dots, 9$. Le spline sono state, poi, valutate in corrispondenza di nodi z_{2ij} appartenenti alla griglia individuata dagli intervalli

$$x_2 \in [5 : 2 : 40] \quad \text{e} \quad y_2 \in [-40 : 5 : 40]$$

e sono $18 \times 17 = 306$.

Il valore superiore a quello atteso è dovuto all'esclusione, dal calcolo degli errori, e, dunque, dalla loro media, dei punti in cui le funzioni assumono valore **inf**, *in prossimità del piano individuato dall'ascissa di convergenza*,

per la presenza delle singolarità della Trasformata.

Ricostruzioni della parte reale

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.0405	0.0015
spline cubica complete	csape	0.2781	0.0066
spline cubica naturale	csape	0.0345	0.0012
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	0.1120	0.0042

Tabella 4.3: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nella regione di convergenza**

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.0160	3.2907e-04
spline cubica complete	csape	0.0720	0.0039
spline cubica naturale	csape	0.0272	0.0013
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	0.3887	0.0078

Tabella 4.4: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nella regione di convergenza**

Per **valori di** $|z| \rightarrow \infty$ le spline sono state costruite sulla griglia individuata dai punti

$$x \in [90 : 2 : 110] \quad \text{e} \quad y \in [90 : 2 : 110],$$

dunque costituita da $11 \times 11 = 121$ punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 11$ e $j = 1, \dots, 11$. Le spline sono state, poi, valutate in corrispondenza di nodi z_{2ij} appartenenti alla griglia individuata dai punti

$$x_2 \in [70 : 5 : 200] \quad \text{e} \quad y_2 \in [70 : 5 : 200]$$

e sono $27 \times 27 = 729$.

Ricostruzioni della parte reale

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		8.1647e-05	2.0836e-05
spline cubica complete	csape	5.0982e-05	3.0493e-06
spline cubica naturale	csape	0.0018	2.3323e-04
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	4.8616e-05	2.9245e-06

Tabella 4.5: Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'*intorno di infinito*

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.0019	4.5429e-04
spline cubica complete	csape	1.3720e-04	7.2179e-06
spline cubica naturale	csape	0.0583	0.0021
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	1.2496e-04	6.6385e-06

Tabella 4.6: Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'*intorno di infinito*

Conclusioni

In Tab.4.7 si riassumono brevemente le conclusioni sulle approssimazioni locali della funzione Trasformata di Laplace 8).

Concludendo, una rappresentazione *globale* del **modello** può essere fornita dalla **spline generalizzata** la cui restrizione *al finito*, ovvero nella regione in cui cadono i campioni, sia la **spline biarmonica**; al contrario, il suo andamento asintotico, all'infinito, potrebbe essere quello della **spline bi-cubica complete**. La sua rappresentazione *globale* sarà condizionata dalla

Regione in cui cadono le singolarità:	spline biarmonica
Regione di convergenza, al finito :	spline biarmonica
Regione di convergenza, all'infinito :	spline complete oppure spline biarmonica

Tabella 4.7: Conclusioni sull'accuratezza

scelta della funzione con cui si raccordano le due, imponendo opportune condizioni di regolarità sulle curve di frontiera ³.

³Per i dettagli relativi alla rappresentazione globale del modello approssimante la Trasformata, ovvero sulle superfici di raccordo (*blending surfaces*), si rimanda all'Appendice A.2.1.

4.1.4 $F(s) = 1/\sqrt{s+2}$

Confrontiamo le superfici con cui si rappresentano la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria della funzione complessa

$$26) F(s) = 1/\sqrt{s+2} \quad f(t) = e^{-2t}/\sqrt{\pi t}$$

con le approssimazioni ottenute attraverso le funzioni implementate dal `matlab`.

Studiamo l'approssimazione della *determinazione principale* di F . Ricordiamo, in particolare, che la radice quadrata \sqrt{z} è una funzione complessa a due determinazioni, che non ha significato per $z = 0$ ⁴.

Test matlab: combinazione di thin-plate splines

In base a quanto osservato, la Trasformata di Laplace $F(s) = 1/\sqrt{s+2}$ non è definita per $s = -2$. Il piano che individua la regione di convergenza avrà equazione $Re(s) \geq -2$. Visualizziamo l'andamento delle due parti di F , distinguendo, anche per questa funzione, le approssimazioni prodotte nella regione di convergenza, al finito ed all'infinito. I risultati relativi allo studio dell'approssimazione nella regione in cui cadono le singolarità della funzione sono riportati nelle tabelle del paragrafo seguente.

Test sulla parte reale

In Fig. 4.41 è descritta la superficie interpolante i dati. In Fig. 4.42 si riporta la superficie che congiunge i valori della funzione $u(x, y)$, corrispondenti ad una griglia di punti del piano in cui cadono i nodi di costruzione. La Fig. 4.43 descrive, invece, la superficie ricostruita e, dunque, l'approssimazione della u **nella regione di convergenza** della Trasformata, attraverso spline biarmonica. Come si può osservare dalle superfici descritte nelle figure 4.41-4.44, anche per questa funzione l'approssimazione si può ritenere sufficientemente accurata, a meno della regione in prossimità delle singolarità della F .

⁴In generale, poiché il logaritmo complesso $\log z$ non è definito per $z = 0$, la potenza complessa, z^ζ non ha significato per $z = 0$, a meno che la potenza ζ non sia un intero; in tal caso, infatti, le infinite determinazioni si riducono ad una sola, che sarà necessariamente la principale, e la potenza risulta definita anche per $z = 0$.

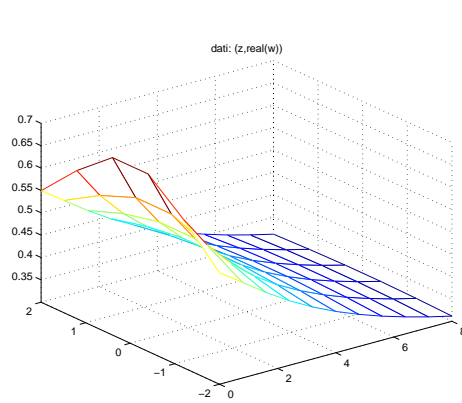


Figura 4.41: **Dati:** $(z, \text{real}(w))$

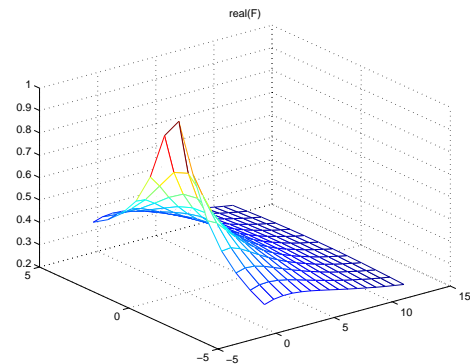


Figura 4.42: **Parte reale della funzione Trasformata di Laplace, nella regione di convergenza**

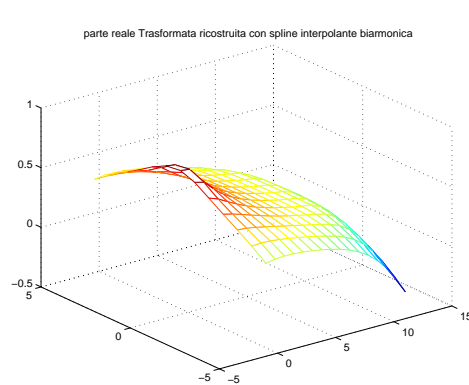


Figura 4.43: **Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline biarmonica**

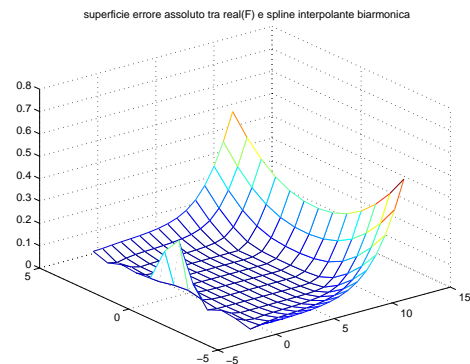


Figura 4.44: **Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, e la funzione $u(x, y)$**

Risultati analoghi si riscontrano studiando il comportamento della parte immaginaria della funzione e della sua ricostruita attraverso spline biarmonica.

Test sul coefficiente dell'immaginario

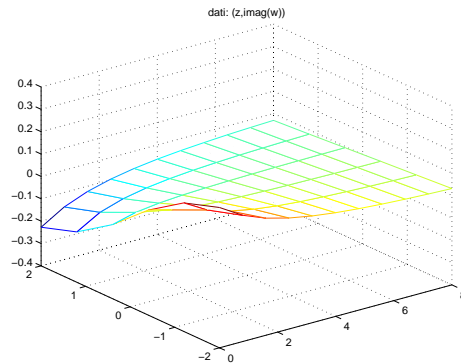


Figura 4.45: Dati: $(z, \text{imag}(w))$

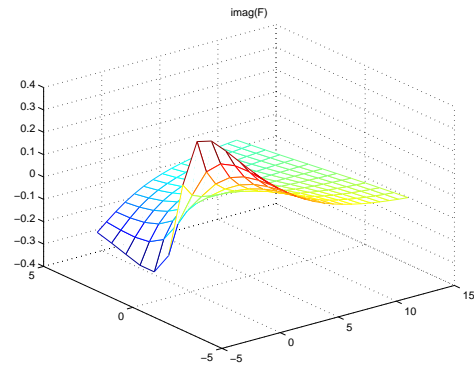


Figura 4.46: Coefficiente dell'immaginario della funzione Trasformata di Laplace, nella regione di convergenza

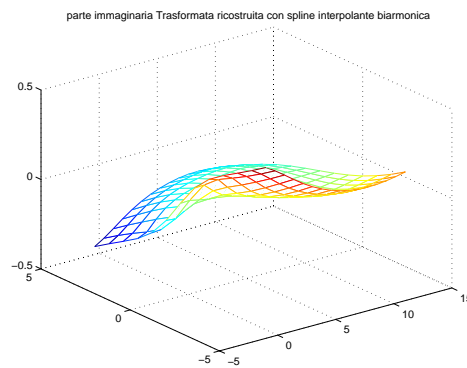


Figura 4.47: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline biarmonica

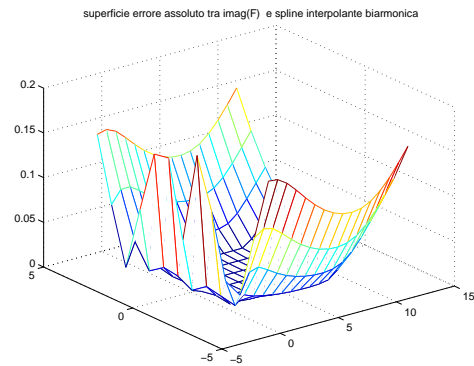


Figura 4.48: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, e la funzione $v(x, y)$

Infine illustriamo i risultati ottenuti approssimando l'andamento delle funzioni u e v **all'infinito**. Fissiamo, ad esempio, $\epsilon = 10^{-5}$, e supponiamo che i campioni abbiano ordine di grandezza non maggiore di ϵ :

$$|u(x_i, y_i)| \leq 10^{-5}, \quad |v(x_i, y_i)| \leq 10^{-5}, \quad \forall i$$

Osserviamo che questa condizione è soddisfatta, ad esempio, se è vera la condizione

$$|z_i| > 10^{10}, \quad \forall i,$$

per cui ha senso parlare di approssimazione di F in un *intorno di infinito*. Ad esempio, in Fig. 4.49 è descritta la superficie interpolante gli n dati, per i quali

$$\max_{i=1, \dots, n} |u(x_i, y_i)| = 4.8549e - 06, \quad \text{con} \quad \max_{i=1, \dots, n} |z_i| = 8.4853e + 10 > 10^{10};$$

in Fig. 4.50 è, invece, descritta la superficie ottenuta interpolando gli nv valori da approssimare, tali che:

$$\max_{j=1, \dots, nv} |u(x_j, y_j)| = 8.4090e - 06, \quad \text{con} \quad \max_{j=1, \dots, nv} |z_j| = 1.1172e + 11 > 10^{11}.$$

Test sulla parte reale

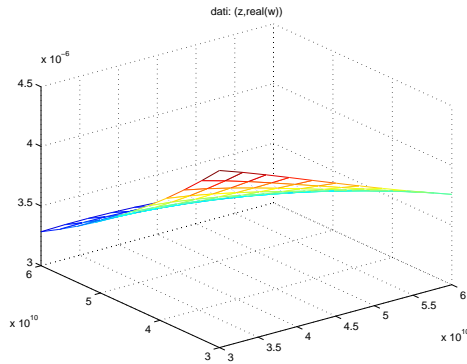


Figura 4.49: **Dati:** $(z, \text{real}(w))$

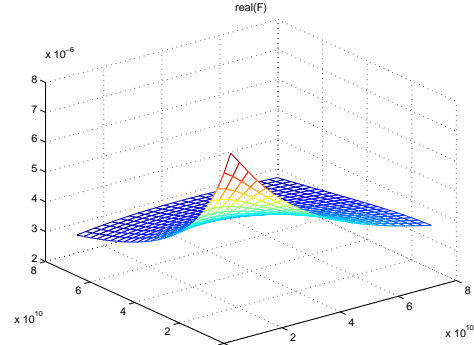


Figura 4.50: **Parte reale della funzione Trasformata di Laplace, in un *intorno di infinito***

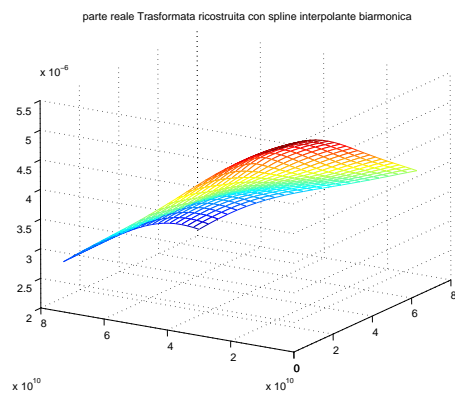


Figura 4.51: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline biarmonica

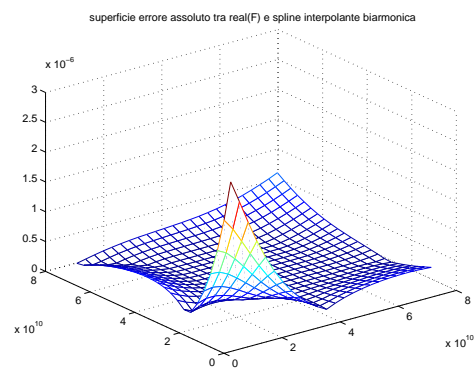


Figura 4.52: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

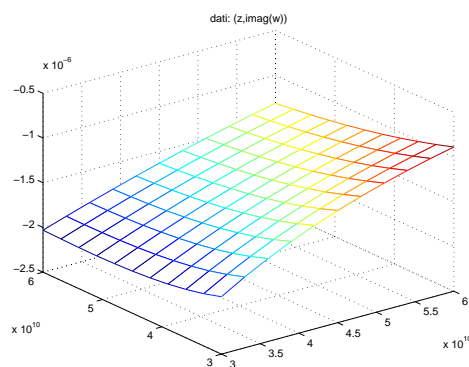


Figura 4.53: Dati: $(z, \text{imag}(w))$

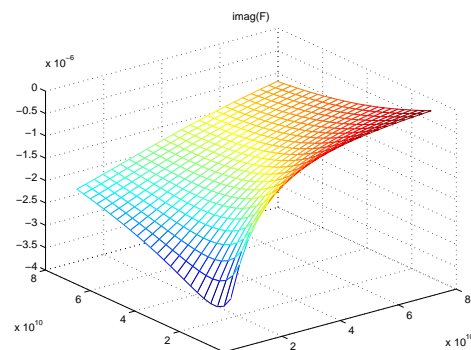


Figura 4.54: Coefficiente dell'immaginario della funzione Trasformata di Laplace, in un *intorno di infinito*

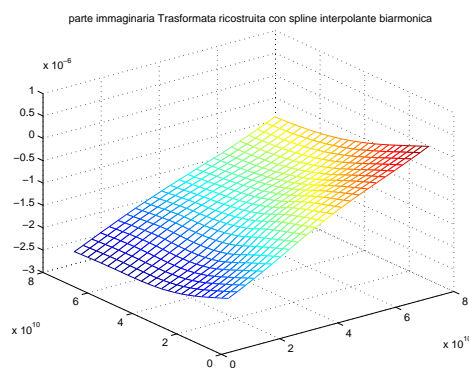


Figura 4.55: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline biarmonica

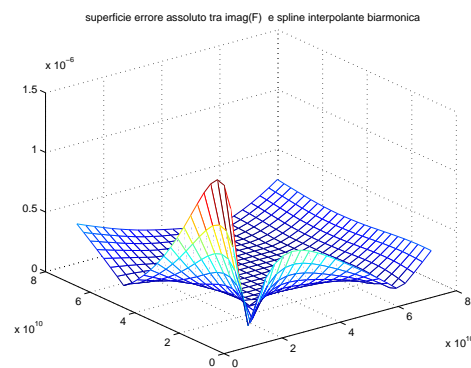


Figura 4.56: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, e la funzione $v(x, y)$

Test matlab: csape, csapi

Determiniamo, ora, le approssimazioni delle superfici che rappresentano parte reale e coefficiente dell'immaginario, mediante splines bicubiche polinomiali, ottenute implementando le funzioni matlab: `csape`, `csapi`.

Test sulla parte reale

Le figure 4.57-4.60 fanno riferimento all'andamento della funzione u nella **regione di convergenza**, al finito, mentre le 4.65-4.68 al comportamento per $|z| \rightarrow \infty$.

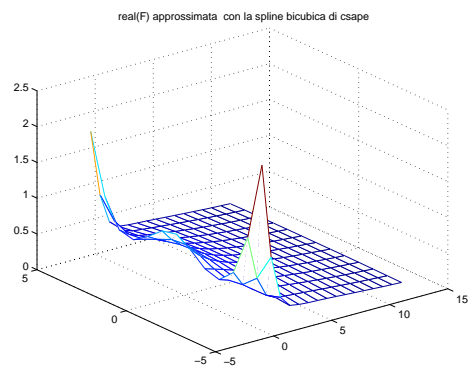


Figura 4.57: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica complete

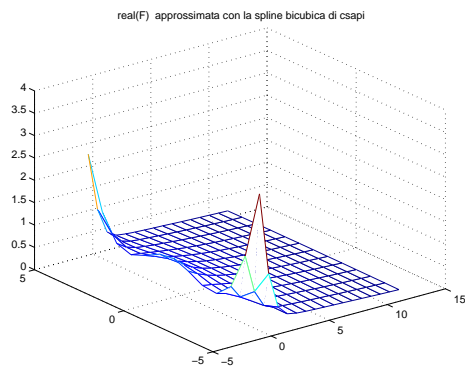


Figura 4.58: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica not-a-knot

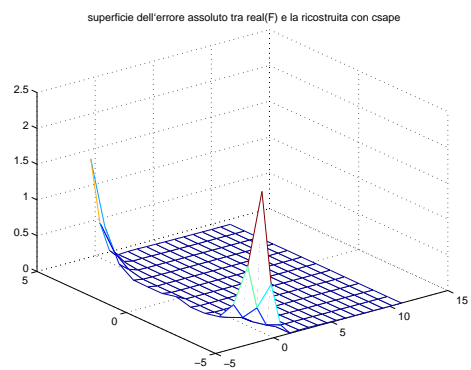


Figura 4.59: **Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica complete, e la funzione $u(x, y)$**

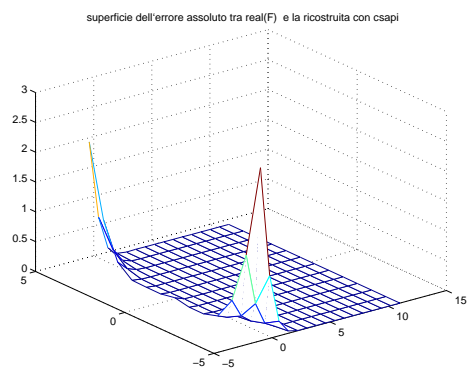


Figura 4.60: **Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $u(x, y)$**

Test sul coefficiente dell'immaginario

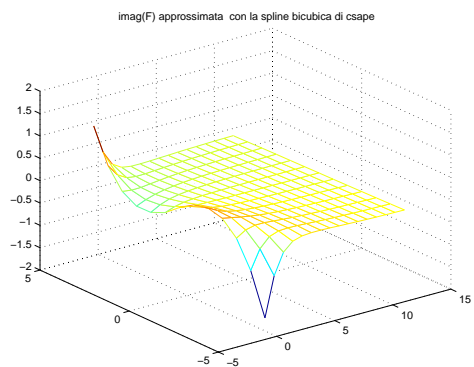


Figura 4.61: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica complete

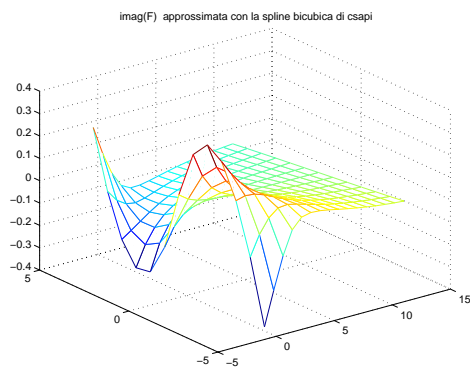


Figura 4.62: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica not-a-knot

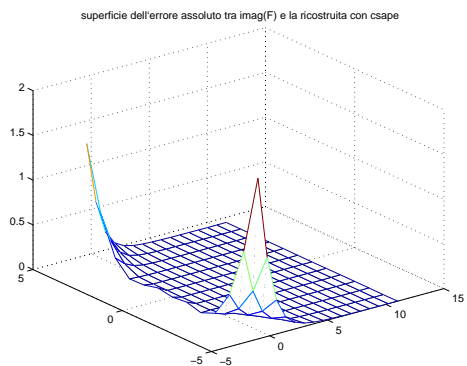


Figura 4.63: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica complete, e la funzione $v(x, y)$

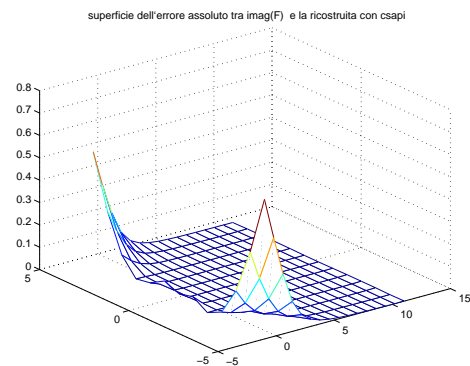


Figura 4.64: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $v(x, y)$

Test sulla parte reale

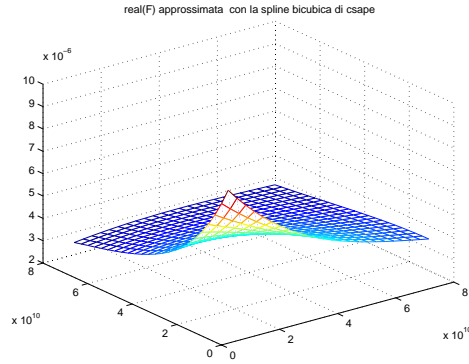


Figura 4.65: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica complete

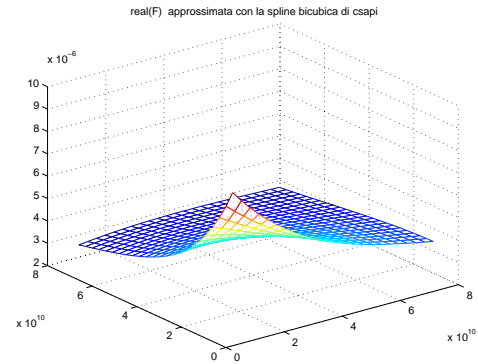


Figura 4.66: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica not-a-knot

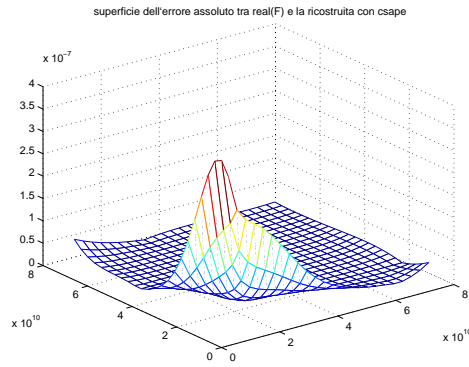


Figura 4.67: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica complete, e la funzione $u(x, y)$

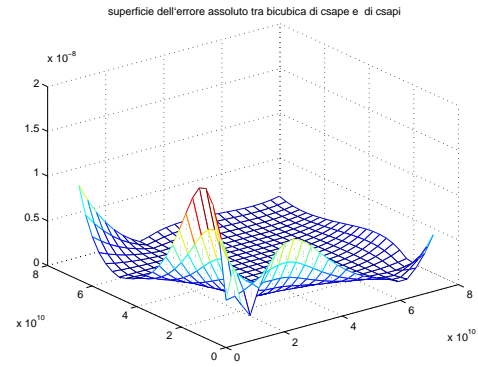


Figura 4.68: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

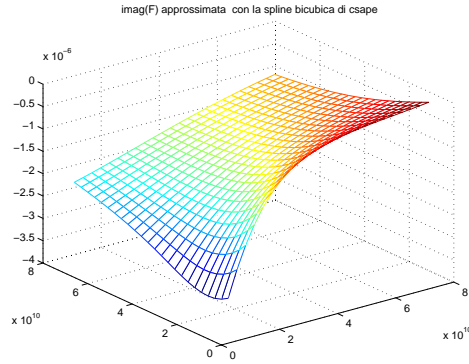


Figura 4.69: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica complete

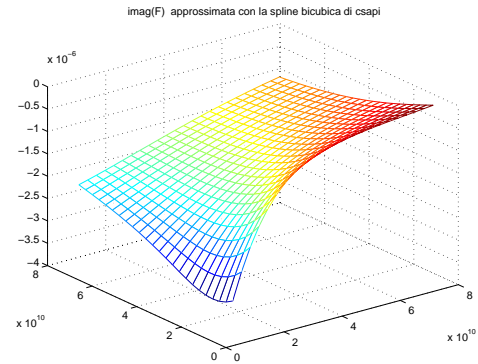


Figura 4.70: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica not-a-knot

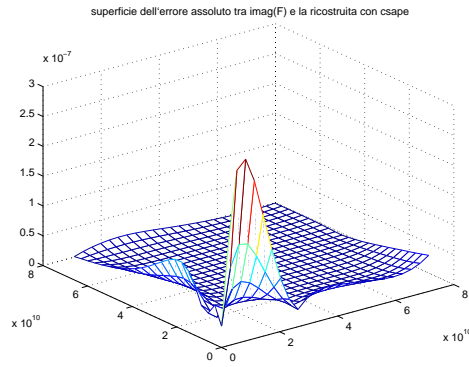


Figura 4.71: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica complete, e la funzione $v(x, y)$

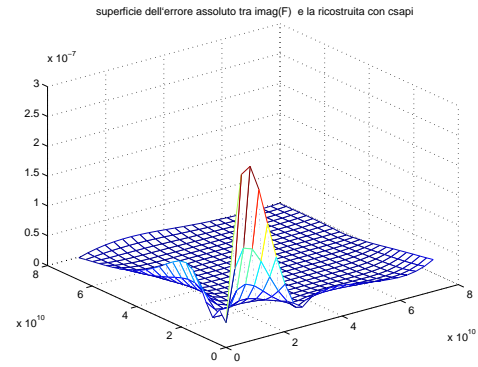


Figura 4.72: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $v(x, y)$

Considerazioni

Per la Trasformata 26) l'approssimazione fornita dalla spline biarmonica, al finito, sia nella regione di convergenza (così come nell'intorno della singolarità), risulta più accurata rispetto alla spline complete ed alla not-a-knot. Al contrario, lontano dal piano individuato dall'ascissa di convergenza, le spline polinomiali forniscono un'approssimazione della trasformata corretta fino ad una cifra significativa in più rispetto a quella fornita dalla spline biarmonica; tuttavia l'errore assoluto nell'approssimazione mediante spline biarmonica, avendo, come riportato nelle tabelle del paragrafo seguente, al più ordine di grandezza 10^{-6} , può ritenersi accettabile, in relazione all'ordine di grandezza dei dati.

Test matlab: spline cubica naturale interpolante

Analoghi confronti possono essere realizzati sui risultati ottenuti mediante spline cubica naturale interpolante.

Test sulla parte reale

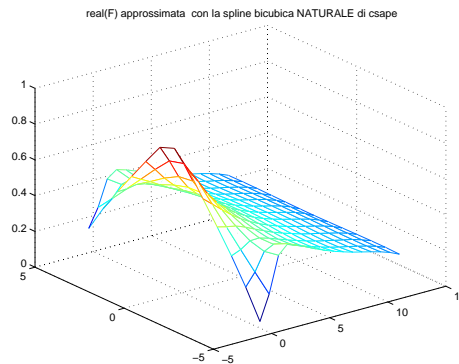


Figura 4.73: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale

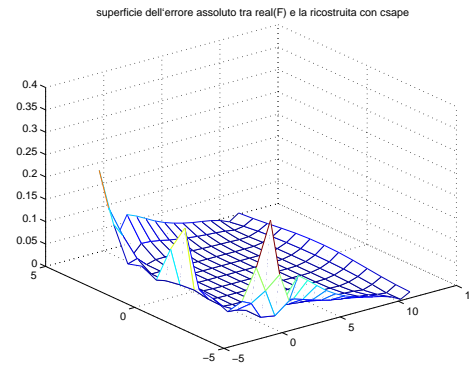


Figura 4.74: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale e la funzione $u(x,y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

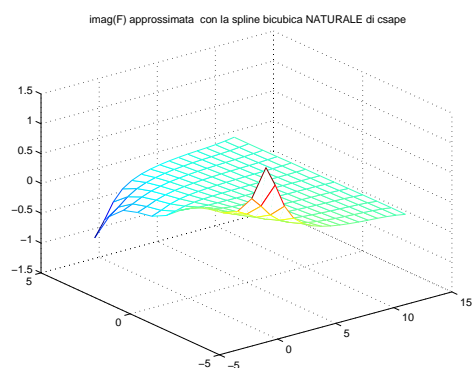


Figura 4.75: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale

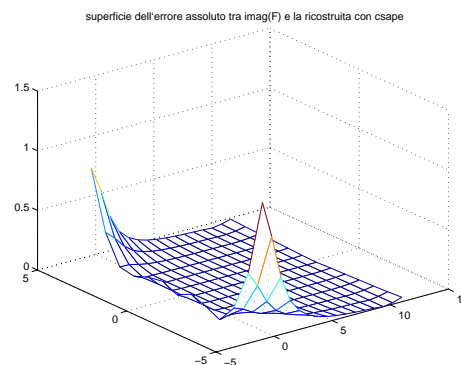


Figura 4.76: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale e la funzione $v(x, y)$

Test sulla parte reale

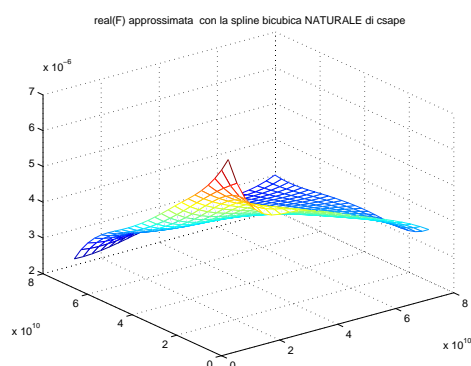


Figura 4.77: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale

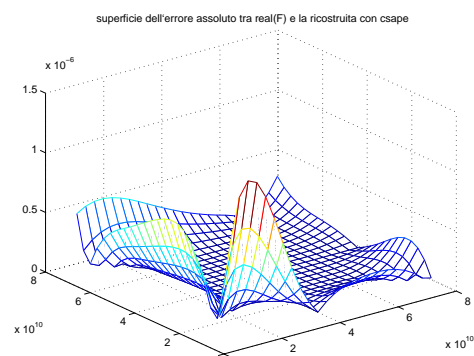


Figura 4.78: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

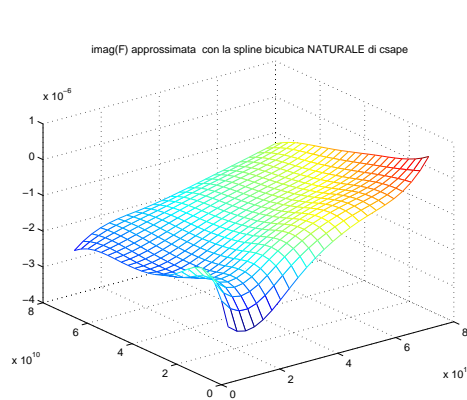


Figura 4.79: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale

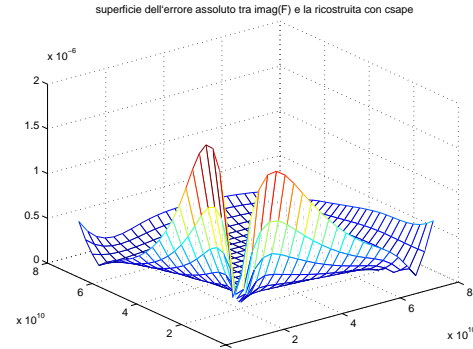


Figura 4.80: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale e la funzione $v(x, y)$

Considerazioni

Per la funzione in esame la spline cubica naturale fornisce, localmente, approssimazioni accurate, al più quanto la spline biarmonica, per cui valgono le stesse considerazioni che seguono il confronto tra la biarmonica e le polinomiali complete e not-a-knot.

Conclusioni

Si può concludere, dunque, che la spline **biarmonica** fornisce, localmente, un'approssimazione accurata sia per u che per v , al finito, nella regione di convergenza.

All'infinito, invece, le spline polinomiali, complete e not-a-knot approssimano con maggiore accuratezza l'andamento della funzione trasformata di Laplace. Tuttavia, anche in corrispondenza di dati il cui modulo è notevolmente piccolo, ovvero in una regione in cui l'andamento della funzione è approssimabile a quello asintotico, la spline biarmonica produce un'approssimazione sufficientemente accurata, se si confronta l'ordine di grandezza dei dati con quello dell'errore assoluto commesso nell'approssimazione e, dun-

que, con il numero di cifre decimali corrette in essa. Le conclusioni dedotte sono confermate dai risultati riportati nelle tabelle nel paragrafo seguente.

4.1.5 Accuratezza dei risultati

Le tabelle 4.8, 4.10 e 4.12 fanno riferimento alle ricostruzioni della parte reale della funzione complessa 26), le 4.9, 4.11 e 4.13 alla ricostruzione della parte immaginaria.

Nella **regione in cui cade il punto** $s = -2$ le spline sono state costruite in corrispondenza dei punti

$$x \in [-8 : 0.8 : -4] \quad \text{e} \quad y \in [-2 : 0.8 : 2];$$

la griglia rettangolare dei nodi di costruzione è costituita, dunque, da $6 \times 6 = 36$ punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 6$, e $j = 1, \dots, 6$. Le spline sono state, poi, valutate in corrispondenza di nodi z_{2ij} appartenenti alla griglia individuata dagli intervalli

$$x_2 \in [-10 : 0.8 : -3] \quad \text{e} \quad y_2 \in [-5 : 0.8 : 5]$$

che sono $9 \times 13 = 117$.

Ricostruzioni della parte reale			
modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.3130	0.0609
spline cubica complete	csape	3.7969	0.2415
spline cubica naturale	csape	1.4169	0.0828
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	4.7314	0.3048

Tabella 4.8: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno della singolarità**

Nella **regione di convergenza** le spline sono state costruite interpolando i punti del piano, tali che

$$x \in [0 : 0.8 : 8] \quad \text{e} \quad y \in [-2 : 0.8 : 2];$$

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.6066	0.2000
spline cubica complete	csape	18.7083	2.6549
spline cubica naturale	csape	7.0259	0.7970
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	55.0701	7.3971

Tabella 4.9: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno della singolarità**

la griglia rettangolare dei nodi di costruzione è costituita, dunque, da $11 \times 6 = 66$ punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 11$, e $j = 1, \dots, 6$. Le spline sono state valutate, poi, in corrispondenza di nodi z_{2ij} appartenenti alla griglia individuata dagli intervalli

$$x_2 \in [-1 : 0.8 : 11] \quad \text{e} \quad y_2 \in [-5 : 0.8 : 5]$$

che sono $16 \times 13 = 208$.

Ricostruzioni della parte reale

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.5395	0.0665
spline cubica complete	csape	2.0891	0.0401
spline cubica naturale	csape	0.2585	0.0178
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	2.9047	0.0557

Tabella 4.10: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nella regione di convergenza**

Per **valori di** $|z| \rightarrow \infty$ le spline sono state costruite interpolando i punti del piano, tali che

$$x \in [3.0e10 : 3.0e9 : 6.0e10] \quad \text{e} \quad y \in [3.0e10 : 3.0e9 : 6.0e10];$$

la griglia rettangolare dei nodi di costruzione è costituita, dunque, da $11 \times$

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.1736	0.0445
spline cubica complete	csape	1.7992	0.0469
spline cubica naturale	csape	1.1486	0.0447
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	0.6244	0.0236

Tabella 4.11: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nella regione di convergenza**

11 = 121 punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 11$, e $j = 1, \dots, 11$. Le spline sono state, poi, valutate in corrispondenza dei $24 \times 24 = 576$ nodi, z_{2ij} , appartenenti alla griglia individuata dagli intervalli

$$x_2 \in [1.0e10 : 3.0e9 : 8.0e10] \quad \text{e} \quad y_2 \in [1.0e10 : 3.0e9 : 8.0e10].$$

Ricostruzioni della parte reale

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		2.5717e-06	1.4252e-07
spline cubica complete	csape	3.7087e-07	1.4789e-08
spline cubica naturale	csape	1.2610e-06	1.0668e-07
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	3.6794e-07	1.3787e-08

Tabella 4.12: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno di infinito**

Conclusioni

In Tab.4.14 si riassumono brevemente le conclusioni sulla definizione delle spline approssimanti, s_{re} e s_{im} .

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario			
modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		1.2547e-06	1.2067e-07
spline cubica complete	csape	2.7765e-07	8.6765e-09
spline cubica naturale	csape	1.8971e-06	1.7335e-07
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	2.6550e-07	7.9729e-09

Tabella 4.13: Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'*intorno di infinito*

Regione in cui cadono le singolarità:	spline biarmonica
Regione di convergenza, al finito :	spline biarmonica
Regione di convergenza, all'infinito :	spline biarmonica
oppure	complete

Tabella 4.14: Conclusioni sull'accuratezza

Dalle superfici descritte e dai valori degli errori di approssimazione prodotti si può concludere che una rappresentazione *globale* del **modello** può essere fornita dalla **spline generalizzata** la cui restrizione *al finito*, ovvero nella regione in cui cadono i campioni, sia la **spline biarmonica**; al contrario, il suo andamento asintotico, all'infinito, potrebbe essere quello della **spline bicubica complete**. In effetti, all'infinito le spline **complete** e **not-a-knot** forniscono approssimazioni con la stessa accuratezza; tuttavia, data la maggiore accuratezza che la *complete* fornisce al finito, conviene utilizzare quest'ultima anche *lontano* dal piano individuato dall'ascissa di convergenza, qualora si desideri un'accuratezza maggiore di quella fornita dalla spline biarmonica. Naturalmente, la definizione dei modelli s_{re} e s_{im} sarà condizionata dalla scelta della funzione con cui si raccordano le due, imponendo opportune condizioni di regolarità sulle curve di frontiera.

4.1.6 $F(s) = \operatorname{atan}(1/s)$

Confrontiamo le superfici con cui si rappresentano la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria della funzione complessa

$$32) F(s) = \operatorname{atan}(1/s) \quad f(t) = \sin t/t$$

con le approssimazioni ottenute attraverso le funzioni implementate dal `matlab`.

Studiamo l'approssimazione della *determinazione principale* della funzione complessa arcotangente (olomorfa nel campo illimitato ottenuto escludendo dal piano complesso i punti dell'asse immaginario non interni al segmento di estremi $\pm i$).

Test matlab: combinazione di thin-plate splines

La funzione complessa 32) presenta una singolarità *reale*, in corrispondenza del punto $s = 0$. Il piano che individua la regione di convergenza avrà equazione $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. Visualizziamo l'andamento delle due parti di F , distinguendo, anche per questa funzione, le approssimazioni prodotte nella regione di convergenza, al finito ed all'infinito. I risultati relativi allo studio dell'approssimazione nella regione in cui cadono le singolarità della funzione sono riportati nelle tabelle del paragrafo seguente.

Test sulla parte reale

In Fig. 4.81 è descritta la superficie interpolante i dati. In Fig. 4.82 si riporta la superficie che congiunge i valori della funzione u , corrispondenti ad una griglia di punti del piano in cui cadono i nodi di costruzione. La Fig. 4.83 descrive, invece, la superficie ricostruita e, dunque, l'approssimazione della $u(x, y)$ **nella regione di convergenza**, attraverso la spline biarmonica. Come si può osservare dalle superfici descritte nelle figure 4.81-4.84, anche per questa funzione l'approssimazione si può ritenere sufficientemente accurata, a meno della regione in prossimità delle singolarità della F , che cadono all'esterno del segmento dell'asse immaginario, di estremi $\pm i$.

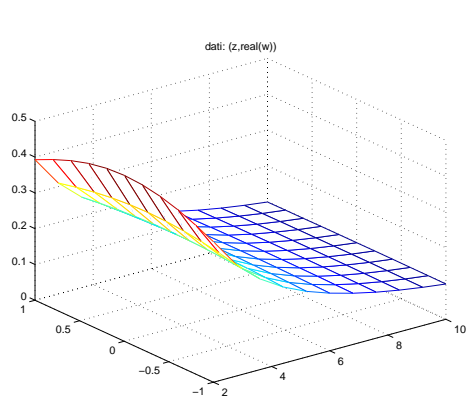


Figura 4.81: **Dati:** $(z, \text{real}(w))$

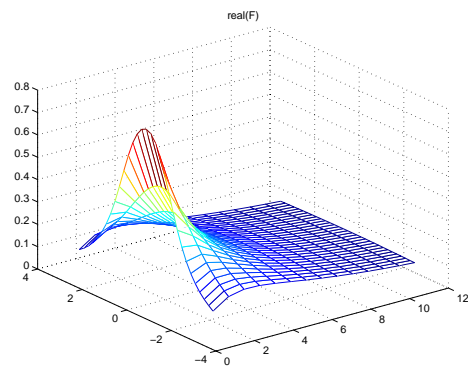


Figura 4.82: **Parte reale della funzione Trasformata di Laplace, nella regione di convergenza**

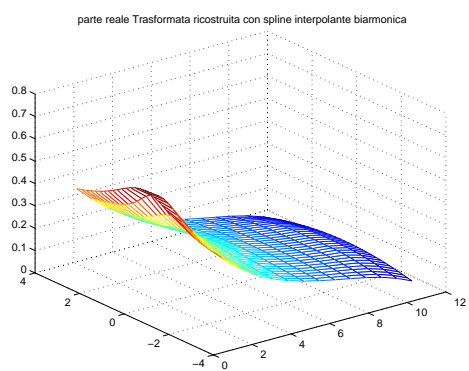


Figura 4.83: **Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline biarmonica**

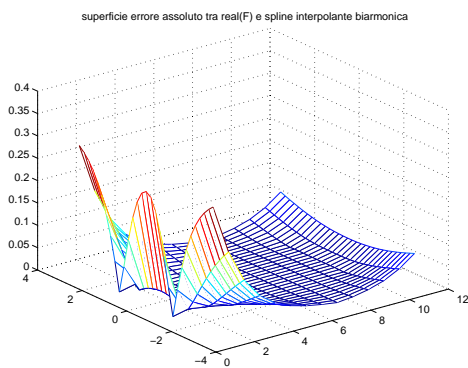


Figura 4.84: **Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, e la funzione $u(x, y)$**

Risultati analoghi si riscontrano studiando il comportamento della parte immaginaria della funzione e della sua ricostruita attraverso spline biarmonica.

Test sul coefficiente dell'immaginario

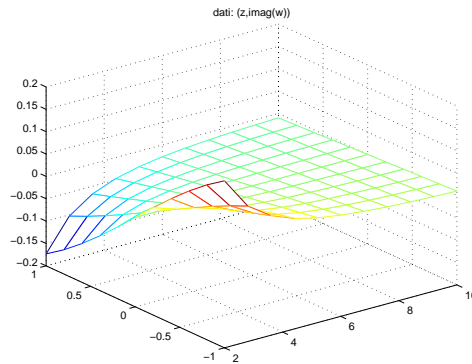


Figura 4.85: Dati: $(z, \text{imag}(w))$

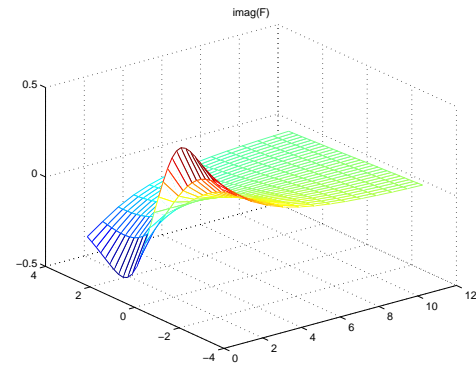


Figura 4.86: Coefficiente dell'immaginario della funzione Trasformata di Laplace, nella regione di convergenza

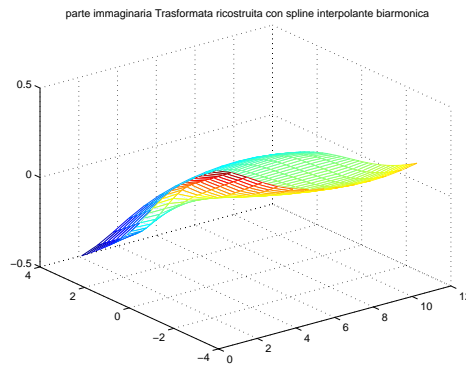


Figura 4.87: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline biarmonica

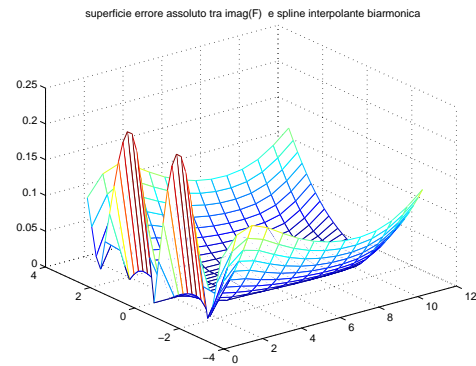


Figura 4.88: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, e la funzione $v(x, y)$

Infine, illustriamo i risultati ottenuti approssimando l'andamento delle funzioni u e v **all'infinito**. Fissiamo, ad esempio, $\epsilon = 10^{-10}$, e supponiamo che i campioni abbiano ordine di grandezza non maggiore di ϵ :

$$|u(x_i, y_i)| < 10^{-10}, \quad |v(x_i, y_i)| < 10^{-10}, \quad \forall i$$

Esiste almeno una regione del piano complesso in cui questa condizione è soddisfatta, ad esempio, se i campioni sono tali che

$$|z_i| > 10^{10}, \quad \forall i;$$

per essi ha senso parlare di approssimazione di F in un *intorno di infinito*. Ad esempio, in Fig. 4.89 è descritta la superficie interpolante gli n dati, per i quali

$$\max_{i=1,\dots,n} |u(x_i, y_i)| = 2.3570e - 11, \quad \text{con} \quad \max_{i=1,\dots,n} |z_i| = 8.4853e + 10 > 10^{10};$$

in Fig. 4.90 è, invece, descritta la superficie ottenuta interpolando gli nv valori da approssimare, tali che:

$$\max_{j=1,\dots,nv} |u(x_j, y_j)| = 7.0711e - 11, \quad \text{con} \quad \max_{j=1,\dots,nv} |z_j| = 1.1172e + 11 > 10^{11}.$$

Test sulla parte reale

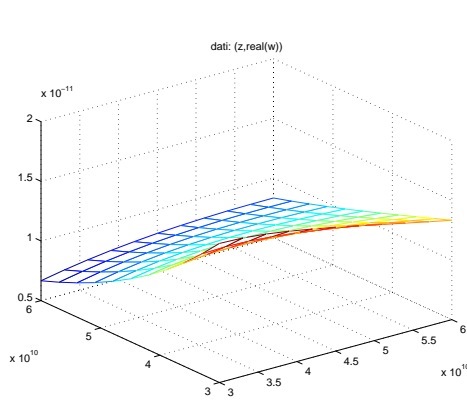


Figura 4.89: Dati: $(z, \text{real}(w))$

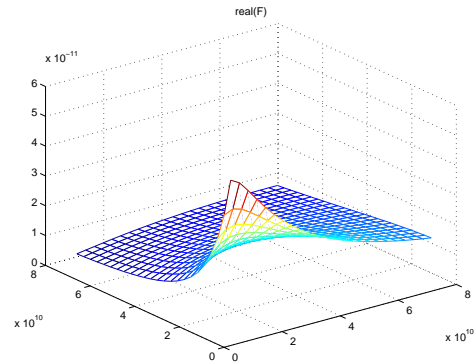


Figura 4.90: Parte reale della funzione Trasformata di Laplace, in un *intorno di infinito*

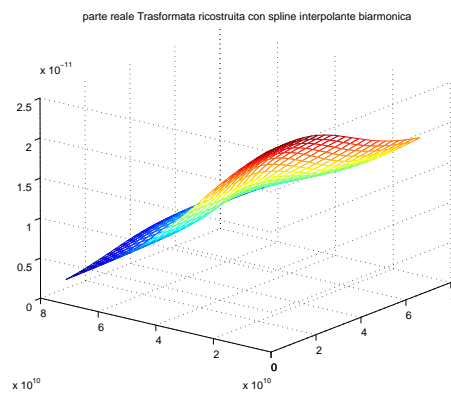


Figura 4.91: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline biarmonica

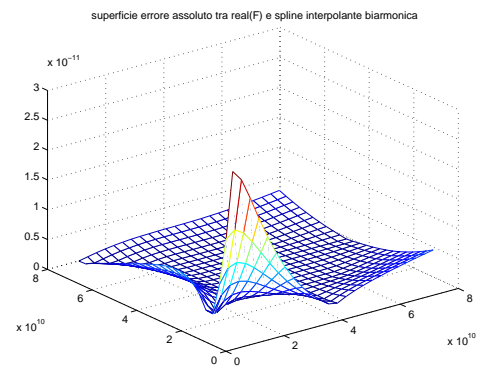


Figura 4.92: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

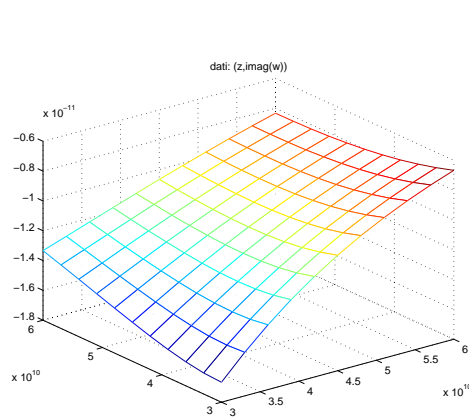


Figura 4.93: Dati: $(z, \text{imag}(w))$

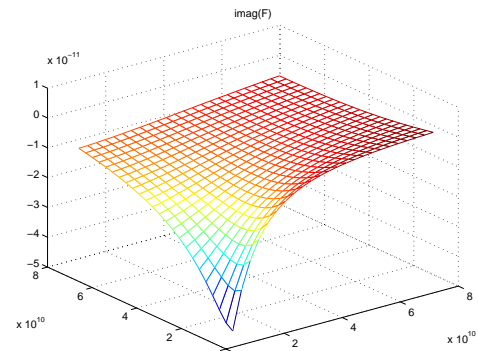


Figura 4.94: Coefficiente dell'immaginario della funzione Trasformata di Laplace, in un intorno di *infinito*

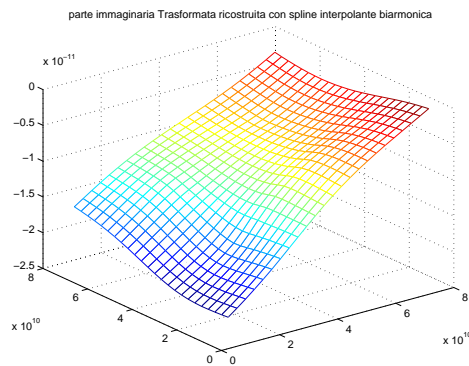


Figura 4.95: Ricostruzione in un intorno di *infinito*, con spline biarmonica

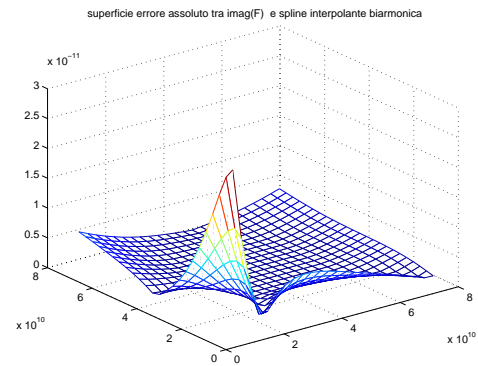


Figura 4.96: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un intorno di *infinito*, e la funzione $v(x, y)$

Test matlab: csape, csapi

Determiniamo, ora, le approssimazioni delle superfici che rappresentano parte reale e coefficiente dell'immaginario, mediante splines bicubiche polinomiali, ottenute implementando le funzioni matlab: `csape`, `csapi`.

Test sulla parte reale

Le figure 4.97-4.100 fanno riferimento all'andamento della funzione u nella sua **regione di convergenza**, al finito, mentre le 4.105-4.108 al comportamento per $|z| \rightarrow \infty$.

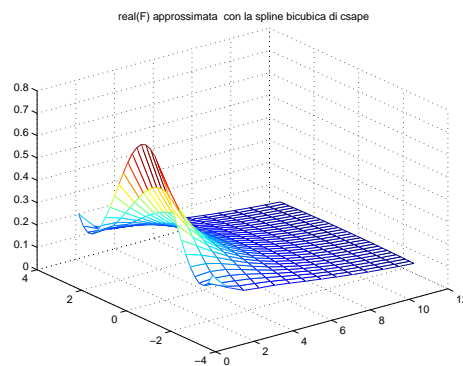


Figura 4.97: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica complete

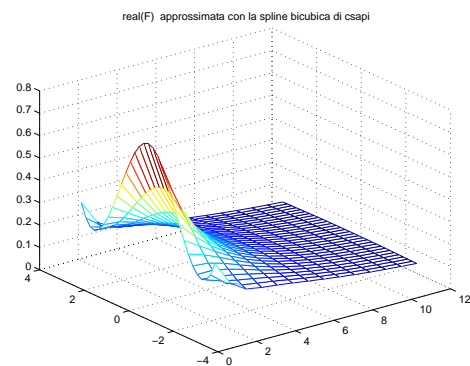


Figura 4.98: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica not-a-knot

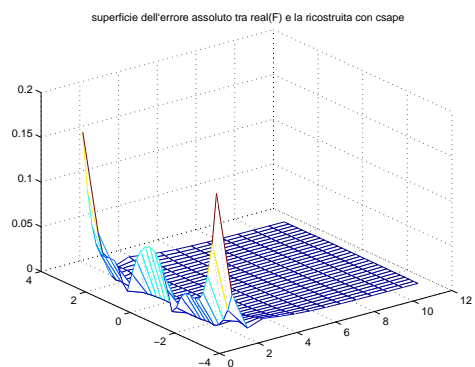


Figura 4.99: **Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica complete, e la funzione $u(x, y)$**

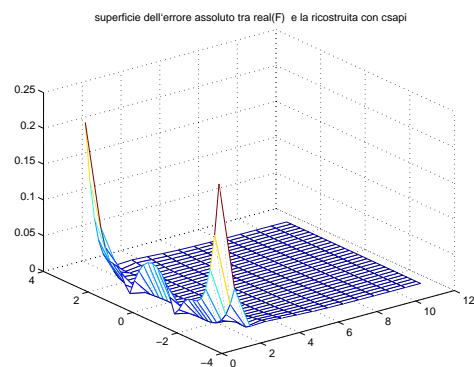


Figura 4.100: **Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $u(x, y)$**

Test sul coefficiente dell'immaginario

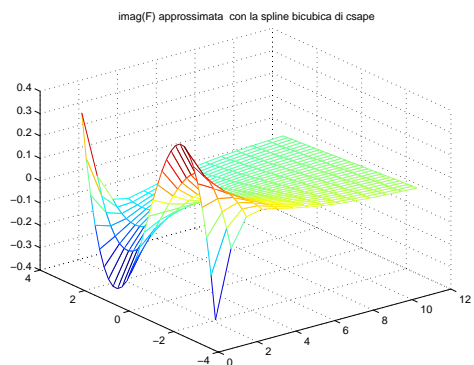


Figura 4.101: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica complete

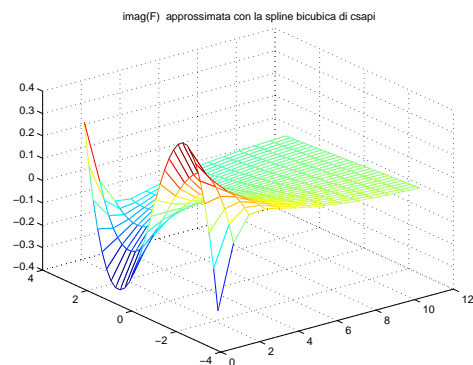


Figura 4.102: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica not-a-knot

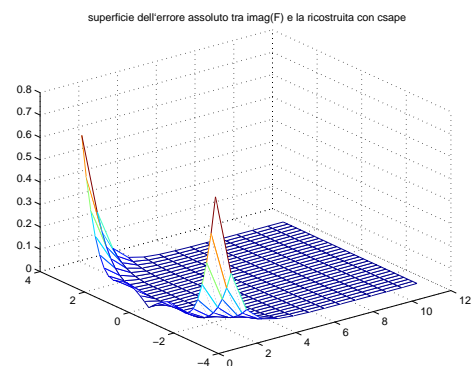


Figura 4.103: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica complete, e la funzione $v(x, y)$

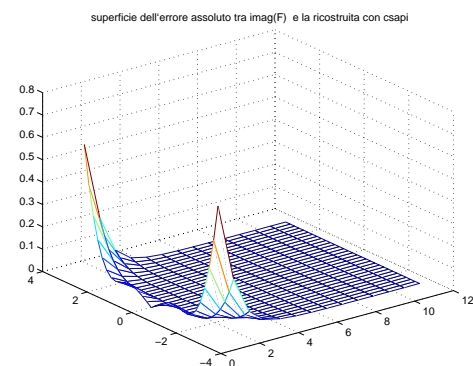


Figura 4.104: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione nella regione di convergenza, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $v(x, y)$

Test sulla parte reale

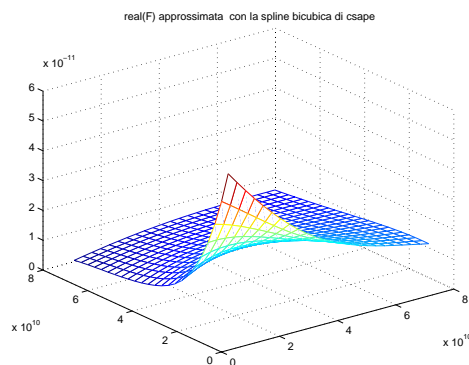


Figura 4.105: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica complete

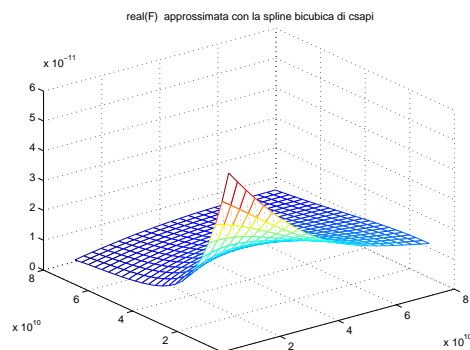


Figura 4.106: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica not-a-knot

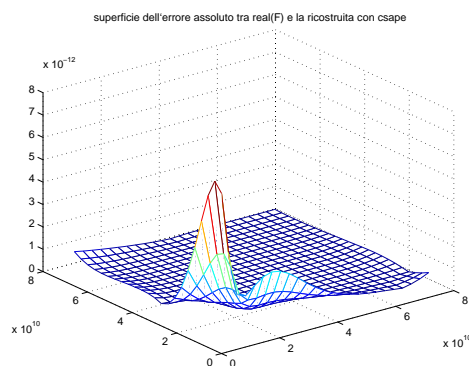


Figura 4.107: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica complete, e la funzione $u(x, y)$

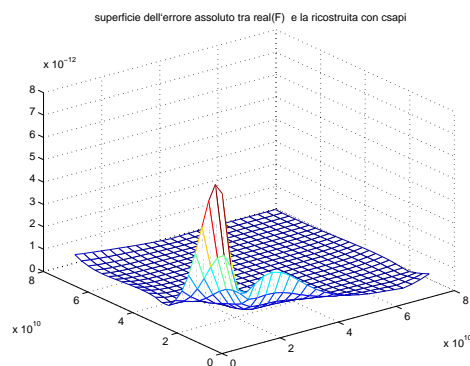


Figura 4.108: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

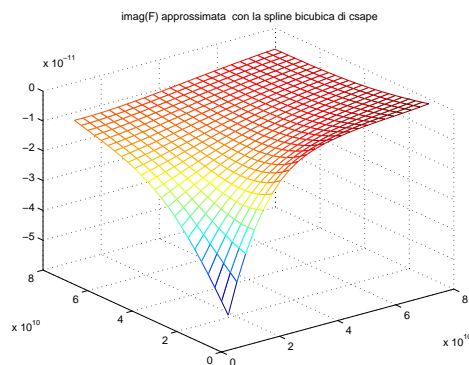


Figura 4.109: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica complete

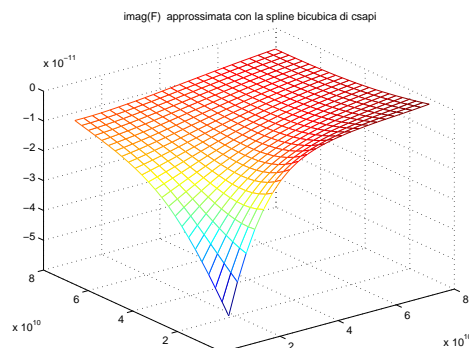


Figura 4.110: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica not-a-knot

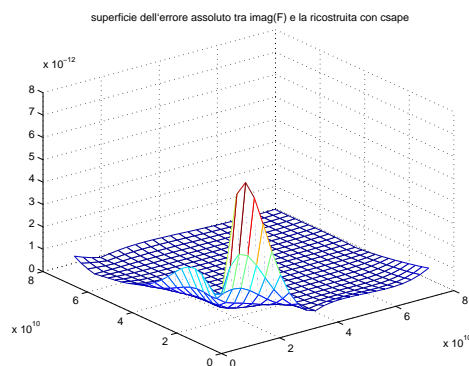


Figura 4.111: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica complete, e la funzione $v(x, y)$

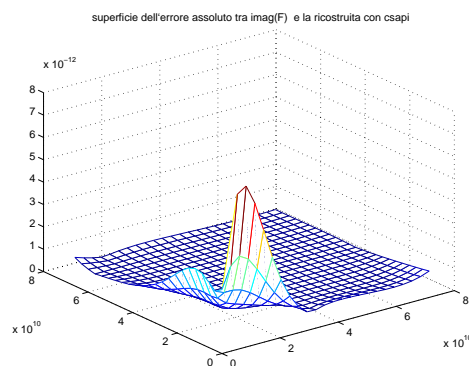


Figura 4.112: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione per $|z| \rightarrow \infty$, mediante spline bicubica not-a-knot, e la funzione $v(x, y)$

Considerazioni

Per la funzione in esame si osserva che le spline polinomiali, complete e not-a-knot danno luogo ad approssimazioni delle funzioni u e v tanto accurate quanto quelle prodotte dalla spline biarmonica, che può, dunque, ritenersi una buona scelta per la definizione delle spline generalizzate s_{re} e s_{im} , al finito. Al contrario, lontano dal piano individuato dall'ascissa di convergenza, le bicubiche forniscono approssimazioni corrette fino ad una cifra significativa in più rispetto a quella fornita dalla spline biarmonica; tuttavia l'errore assoluto nell'approssimazione mediante spline biarmonica, avendo, come riportato nelle tabelle del paragrafo seguente, al più ordine di grandezza 10^{-11} , può ritenersi accettabile, in relazione all'ordine di grandezza dei dati (minore di 10^{-10}).

Complessivamente si può ancora assumere che un'approssimazione globale delle funzioni u e v sia determinata dalla spline biarmonica, sebbene per $|z| \rightarrow \infty$ la spline complete possa garantire una maggiore accuratezza *locale*.

Test matlab: spline cubica naturale interpolante

Analoghi confronti possono essere realizzati sui risultati prodotti dalla spline cubica naturale interpolante.

Test sulla parte reale

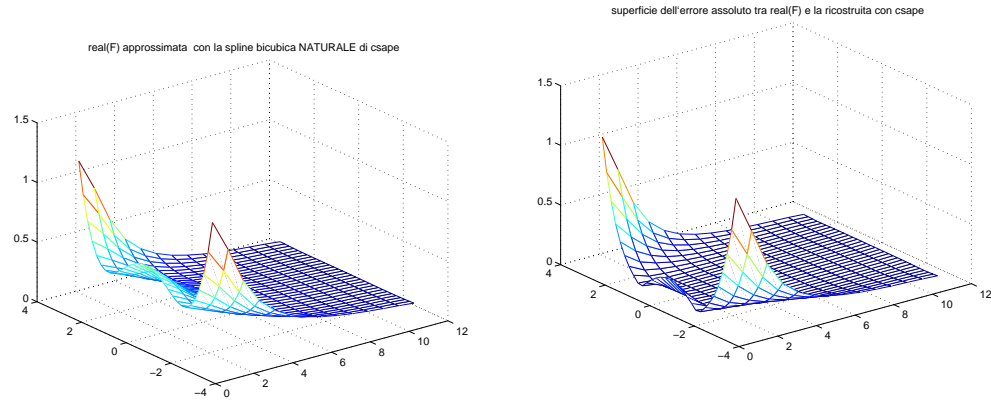


Figura 4.113: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale

Figura 4.114: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

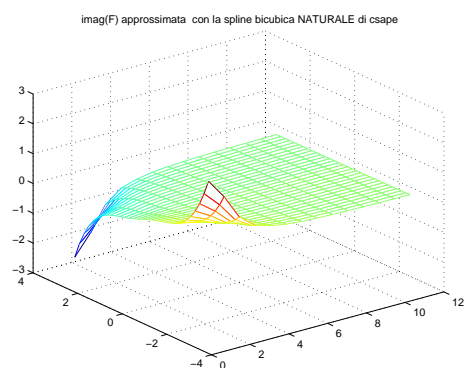


Figura 4.115: Ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale

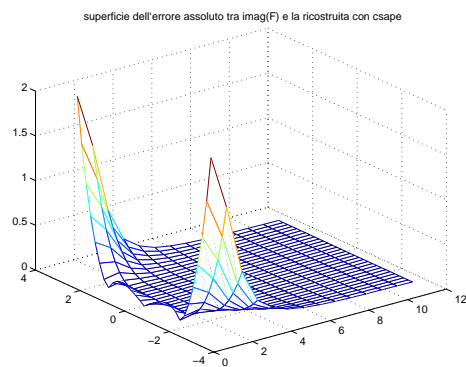


Figura 4.116: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, nella regione di convergenza, con spline bicubica naturale e la funzione $v(x, y)$

Test sulla parte reale

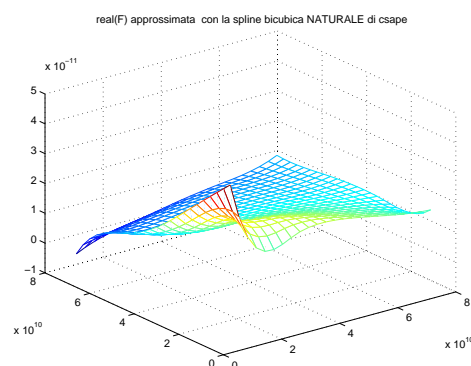


Figura 4.117: Ricostruzione in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale

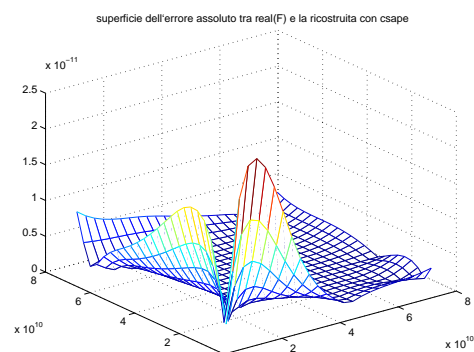


Figura 4.118: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un *intorno di infinito*, con spline bicubica naturale e la funzione $u(x, y)$

Test sul coefficiente dell'immaginario

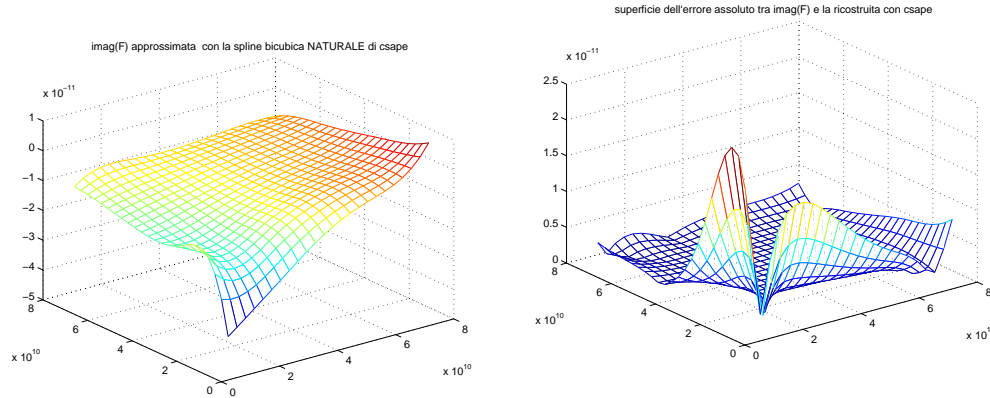


Figura 4.119: Ricostruzione in un intorno di infinito, con spline bicubica naturale

Figura 4.120: Piano dell'errore assoluto tra la ricostruzione, in un intorno di infinito, con spline bicubica naturale e la funzione $v(x, y)$

Considerazioni

La spline cubica naturale fornisce, localmente, approssimazioni meno accurate della spline biarmonica, per cui valgono le stesse considerazioni che seguono il confronto tra la biarmonica e le polinomiali complete e not-a-knot.

Conclusioni

Anche per questa funzione test, come per le precedenti, si può concludere che, assegnato un insieme di campioni, valori di una Trasformata di Laplace, la **spline biarmonica**, approssima, globalmente, con sufficiente accuratezza, sia la parte reale che il coefficiente dell'immaginario, di una funzione trasformata, nella sua regione di convergenza. Al contrario, lontano dal piano che individua l'ascissa di convergenza, per valori di u e v prossimi allo zero, l'approssimazione risulta *localmente* più accurata se si utilizzano spline polinomiali interpolanti, complete o not-a-knot; tuttavia, in questa regione, la spline biarmonica produce un'approssimazione ancora accurata, se si confronta l'ordine di grandezza dei dati con quello dell'errore assoluto commesso nell'approssimazione e, dunque, con il numero di cifre decimali corrette in

essa. Le conclusioni dedotte sono confermate dai risultati riportati nelle tabelle nel paragrafo seguente.

4.1.7 Accuratezza dei risultati

Le tabelle 4.15, 4.17 e 4.19 fanno riferimento alle ricostruzioni della parte reale della funzione complessa 32), le 4.16, 4.18 e 4.20 alla ricostruzione della parte immaginaria.

Nella **regione in cui cadono le singolarità** le spline sono state costruite interpolando i punti di una griglia rettangolare, individuata dagli intervalli

$$x \in [-5 : 0.2 : -2] \quad \text{e} \quad y \in [-1 : 0.2 : 1];$$

tale griglia è costituita, dunque, da $16 \times 11 = 176$ punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 16$, e $j = 1, \dots, 11$. Le spline sono state, poi, valutate in corrispondenza di nodi z_{2ij} appartenenti alla griglia individuata dagli intervalli

$$x_2 \in [-7 : 0.2 : -1] \quad \text{e} \quad y_2 \in [-3 : 0.2 : 3]$$

che sono $31 \times 31 = 961$.

Ricostruzioni della parte reale

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		1.5517	0.2231
spline cubica complete	csape	0.2557	0.0047
spline cubica naturale	csape	0.9665	0.0882
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	0.3347	0.0059

Tabella 4.15: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno delle singolarità**

Nella **regione di convergenza** le spline sono state costruite interpolando i punti di una griglia rettangolare, individuata dagli intervalli

$$x \in [2 : 0.8 : 10] \quad \text{e} \quad y \in [-1 : 0.2 : 1];$$

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.3110	0.0783
spline cubica complete	csape	0.9175	0.0240
spline cubica naturale	csape	1.6243	0.1092
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	0.8522	0.0219

Tabella 4.16: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno delle singolarità**

la griglia rettangolare dei nodi di costruzione è costituita, dunque, da $11 \times 11 = 121$ punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 11$, e $j = 1, \dots, 11$. Le spline sono state, poi, valutate in corrispondenza di nodi z_{2ij} appartenenti alla griglia individuata dagli intervalli

$$x_2 \in [1 : 0.8 : 12] \quad \text{e} \quad y_2 \in [-3 : 0.2 : 3]$$

che sono $14 \times 31 = 434$.

Ricostruzioni della parte reale

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.2895	0.0287
spline cubica complete	csape	0.1615	0.0045
spline cubica naturale	csape	1.1126	0.0532
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	0.2152	0.0052

Tabella 4.17: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nella regione di convergenza**

Per **valori di** $|z| \rightarrow \infty$ le spline sono state costruite interpolando i punti di una griglia rettangolare, individuata dagli intervalli

$$x \in [3.0e10 : 3.0e9 : 6.0e10] \quad \text{e} \quad y \in [3.0e10 : 3.0e9 : 6.0e10];$$

la griglia rettangolare dei nodi di costruzione è costituita, dunque, da $11 \times$

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		0.2219	0.0373
spline cubica complete	csape	0.6314	0.0163
spline cubica naturale	csape	1.9985	0.0711
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	0.5906	0.0149

Tabella 4.18: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nella regione di convergenza**

11 = 121 punti del tipo $z_{ij} = x_i + i y_j$, $i = 1, \dots, 11$, e $j = 1, \dots, 11$. Le spline sono state, poi, valutate in corrispondenza di nodi z_{ij} appartenenti alla griglia individuata dagli intervalli

$$x_2 \in [1.0e10 : 3.0e9 : 8.0e10] \quad \text{e} \quad y_2 \in [1.0e10 : 3.0e9 : 8.0e10]$$

che sono $24 \times 24 = 576$.

Ricostruzioni della parte reale

modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		2.7111e-11	1.4936e-12
spline cubica complete	csape	6.6222e-12	2.0574e-13
spline cubica naturale	csape	2.3798e-11	1.6746e-12
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	6.4679e-12	1.9389e-13

Tabella 4.19: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno di infinito**

Conclusioni

In Tab.4.21 si riassumono brevemente le conclusioni sulla scelta dei modelli *globali* s_{re} e s_{im} .

Ricostruzioni del coefficiente dell'immaginario			
modello	funzione matlab	max errore	MAE
spline biarmonica		2.7111e-11	1.4936e-12
spline cubica complete	csape	6.6222e-12	2.0574e-13
spline cubica naturale	csape	2.3798e-11	1.6746e-12
	'variational'		
spline cubica not-a-knot	csapi	6.4679e-12	1.9389e-13

Tabella 4.20: **Confronto tra l'accuratezza fornita dai modelli testati, nell'intorno di infinito**

Regione in cui cadono le singolarità:	spline biarmonica
Regione di convergenza, al finito :	spline biarmonica
Regione di convergenza, all'infinito :	spline biarmonica
oppure	spline complete

Tabella 4.21: Conclusioni sull'accuratezza

Dalle superfici descritte e dai valori degli errori di approssimazione prodotti si può concludere che una rappresentazione *globale* del **modello** nella regione di convergenza può essere fornita dalla **spline generalizzata** la cui restrizione *al finito*, ovvero nella regione in cui cadono i campioni, sia la **spline biarmonica**; il suo andamento asintotico all'infinito potrebbe essere, però, anche quello fornito dalla **spline bicubica complete**, in relazione all'accuratezza locale fornita nell'approssimazione delle parti *u* e *v* della Trasformata. La sua rappresentazione *globale* sarà condizionata dalla scelta della funzione con cui si raccordano le due, imponendo opportune condizioni di regolarità sulle curve di frontiera.

Capitolo 5

Esperimenti numerici: test di inversione

5.1 Introduzione

In questo capitolo si descrivono alcuni test di inversione in cui, noto un insieme di campioni comunque distribuiti, si vuole calcolare l'antitrasformata della funzione Trasformata che, in qualche modo, li ha generati.

Sia s_{Lt} la spline generalizzata della **Definizione 2.7**. Applichiamo un metodo di inversione numerica per la trasformata di Laplace **nel caso reale**. La soluzione sarà una funzione, \tilde{f} che si assume essere l'approssimazione dell'antitrasformata della Trasformata che ha generato i campioni. L'accuratezza fornita dipenderà dal metodo di inversione applicato.

La risoluzione del problema può considerarsi articolata come segue:

costruire, interpolando i campioni ed, eventualmente, ricampionare, la spline generalizzata s_{Lt} ;

applicare ad essa un metodo di inversione numerica per la Trasformata di Laplace nel caso reale, attraverso il quale si calcolerà una certa funzione \tilde{f} ;

stimare l'accuratezza fornita nel calcolo dell'antitrasformata, ovvero quanto la funzione \tilde{f} possa ritenersi una approssimazione accurata dell'antitrasformata da determinare. La validità del metodo e, dunque, la

bontà dell'approssimazione fornita, dipenderà dal metodo di inversione utilizzato.

5.2 Applicazione di un metodo di inversione

I test fanno riferimento a dati *sintetici*, ovvero abbiamo supposto di conoscere l'espressione analitica della funzione Trasformata di Laplace F , di cui i campioni sono le valutazioni in corrispondenza di un insieme arbitrario di nodi, comunque distribuiti. Abbiamo, dunque, confrontato l'andamento della \tilde{f} con quello dell'antitrasformata f nota, e stimato, sugli stessi intervalli, l'andamento dell'errore puntuale commesso nell'approssimazione di f con \tilde{f} .

Alla spline s_{Lt} è stato applicato il metodo di Rjabov, per l'inversione reale della trasformata di Laplace; per una descrizione dettagliata del metodo si rimanda al lavoro [11].

Alcuni test sono stati realizzati replicando quelli presenti in un lavoro dedicato allo stesso metodo [12] in cui, in particolare, si stima la propagazione degli errori introdotti da un modello di fitting approssimante i dati, nel calcolo dell'antitrasformata di Laplace della funzione che li ha generati.

5.2.1 Calcolo dell'antitrasformata di $F(s) = s/(s^2 + 1)^2$

Sia assegnato un insieme costituito da 127 campioni reali, del tipo

$$P_i = (x_i, F(x_i)), \quad i = 1, \dots, n$$

con le x_i distribuite in maniera *random* in $[0.00027, 15]$ e le ordinate corrispondenti, $F(x_i)$, calcolate valutando la funzione trasformata di Laplace

$$18) F(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2},$$

la cui antitrasformata è

$$f(t) = \frac{t \sin(t)}{2}.$$

Stimiamo, dunque, l'accuratezza fornita nel calcolo dell'antitrasformata, confrontando con f la funzione \tilde{f} calcolata applicando a s_{Lt} il metodo di

Rjabov. Si riportano, in tabella 5.1 i valori dell'errore relativo

$$relerr_{s_{Lt}} = \frac{\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_{\infty}}{\|f(x)\|_{\infty}}$$

calcolati al variare di N , numero dei punti di valutazione della funzione s_{Lt} nonché numero dei coefficienti, \tilde{c} , dello sviluppo troncato, in serie di polinomi di Laguerre dell'antitrasformata.

Si osserva che il metodo di Rjabov dipende fortemente dalla scelta di N [12].

N	$E_{fitting}$	$relerr_{s_{Lt}}$
8	1.9383e-07	1.6231e-02
9	1.7705e-07	4.9804e-02
11	1.8707e-07	1.0555e-02
18	2.0202e-07	1.0119e-02

Tabella 5.1: **Errore relativo**

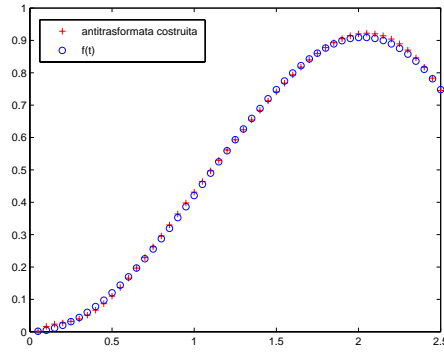


Figura 5.1: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} nell'intervallo di costruzione, $N = 8$**

Supponiamo che i nodi, $N = 9$, appartengano all'intervallo $[7.1339e - 01, 2.2933e + 02]$; valutando il modello fuori dall'intervallo contenente i nodi, per esempio in $[7.0299e - 01, 1.0237e + 03]$, con 19 punti di valutazione,

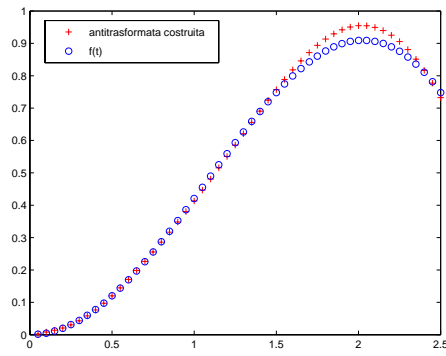


Figura 5.2: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} nell'intervallo , $N = 9$**

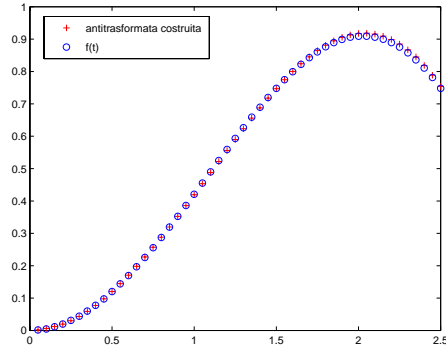


Figura 5.3: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} nell'intervallo di costruzione , $N = 11$**

l'accuratezza fornita migliora, ed i risultati sono rappresentati in Fig. 5.2 e 5.4.

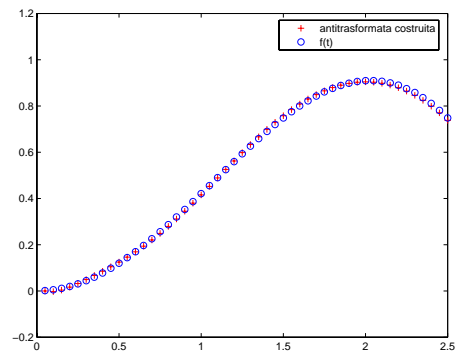


Figura 5.4: **Approssimazione dell'antitrasformata: inversione della spline s_{Lt} nell'intervallo di valutazione , $N = 19$**

Ripetendo il procedimento utilizzando, come modello di fitting la spline cubica complete, si ottengono i risultati in Fig. 5.5-5.6.

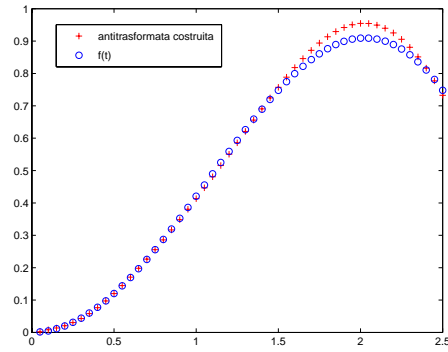


Figura 5.5: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{compl} nell'intervallo di costruzione $[7.1339e - 01, 2.2933e + 02]$, $N = 9$**

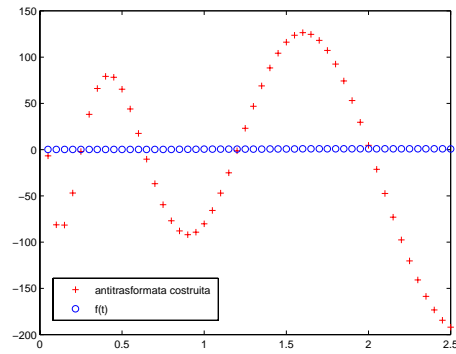


Figura 5.6: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{compl} nell'intervallo di valutazione $[7.0299e - 01, 1.0237e + 03]$, $N = 19$**

Come si osserva confrontando le figure 5.2 e 5.4 con le corrispondenti 5.5 e 5.6, le due spline approssimano con uguale accuratezza la funzione trasformata tra i nodi di costruzione; in effetti in tale regione le due spline sono entrambe cubiche interpolanti. Al contrario, valutando le funzioni fuori dall'intervallo di costruzione, l'errore di approssimazione cresce notevolmente per la complete. Il suo valore massimo, incide sull'accuratezza dell'approssimazione della funzione antitrasformata, come testimoniato dall'andamento delle curve in Fig. 5.5-5.6.

In [12] è stata realizzata l'analisi della propagazione degli errori per il metodo di Rjabov: a partire dall'errore di fitting è stata determinata la massima accuratezza ottenibile nel calcolo dell'antitrasformata, espressa mediante un limite superiore per il valore di N . In particolare, nel lavoro citato la Trasformata di Laplace è approssimata mediante spline *cubica naturale*. Utilizzando s_{Lt} si osserva che, per $N = 9$, l'errore nell'approssimazione della trasformata, il cui massimo valore raggiunge l'ordine $\mathcal{O}(10^{-7})$ si amplifica a causa dell'indice di condizionamento della matrice di Vandermonde,

$$\mu(V) \approx 6.2671e + 02 = \mathcal{O}(10^2)$$

determinando un errore relativo nell'antitrasformata dell'ordine di $\mathcal{O}(10^{-2})$. Per $N = 19$, invece,

$$E_{fitting} = 1.1901e - 07$$

e $\mu(V) = 3.9804e + 06$; in corrispondenza di quest'ultimo, il valore dell'errore relativo commesso nell'approssimazione dell'antitrasformata è:

$$relerr_{s_{Lt}} = 1.2848e - 02$$

Proviamo, ora, a cambiare modello di fitting. Supponiamo di approssimare la Trasformata di Laplace mediante spline *cubica complete*. I risultati prodotti da quest'ultima, valutata in corrispondenza di $N = 9$ punti appartenenti all'insieme dei nodi di costruzione, coincidono con quelli ottenuti mediante s_{Lt} , sullo stesso intervallo; al contrario, per $N = 19$, si ha

$$E_{fitting} = 1.1506e - 04 \quad \text{e} \quad relerr_{s_{compl}} = 2.1188e + 02$$

5.2.2 Calcolo dell'antitrasformata di $F(s) = 1/(1 + 0.5s)^3$

Sia assegnato un insieme costituito da 69 campioni reali, del tipo

$$P_i = (x_i, F(x_i)), \quad i = 1, \dots, n$$

con le x_i distribuite in maniera *random*:

$$x_i \in (3 \times 10^{-4}, 10^{-1}), \quad i = 1, \dots, n$$

e le ordinate corrispondenti, $F(x_i)$, calcolate valutando la funzione trasformata di Laplace

$$14) F(x) = 1/(1 + 0.5x)^3,$$

la cui antitrasformata è

$$f(t) = 4t^2 e^{-2t}.$$

Valgono, per questo test, ed in relazione ai risultati descritti in tabella 5.2 e nella figure corrispondenti, le osservazioni, relative alla dimensione del problema ed alla propagazione degli errori, analoghe a quelle illustrate per la funzione precedente. Per questo test ci soffermiamo solo sui risultati ottenuti applicando alla spline s_{Lt} il metodo di inversione di Rjabov.

In Tabella 5.2 si descrivono gli errori di fitting e gli errori relativi nelle ricostruzioni dell'antitrasformata, mediante spline s_{Lt} .

N	$E_{fitting}$	$relerr_{s_{Lt}}$
5	3.2232e-08	4.8633e-02
8	2.2167e-07	4.0364e-03
10	6.3214e-07	5.0467e-04
18	1.4891e-04	1.3176e+00

Tabella 5.2: **Errore relativo**

La scelta $N = 10$ sembra garantire il giusto compromesso nel tentativo di mantenere bassi i due errori riportati in Tabella.

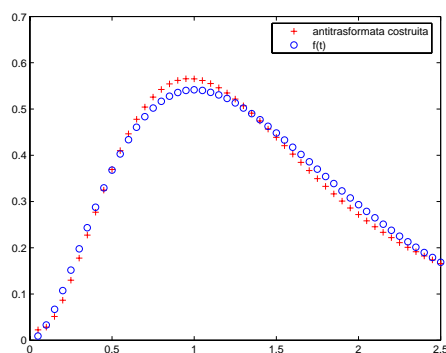


Figura 5.7: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} , $N = 5$**

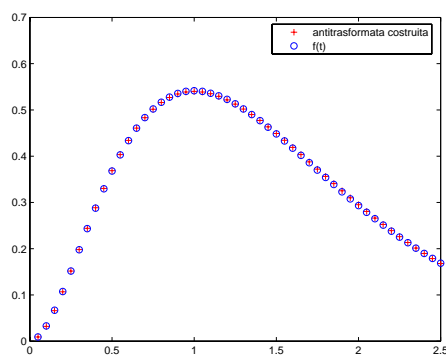


Figura 5.8: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} , $N = 8$**

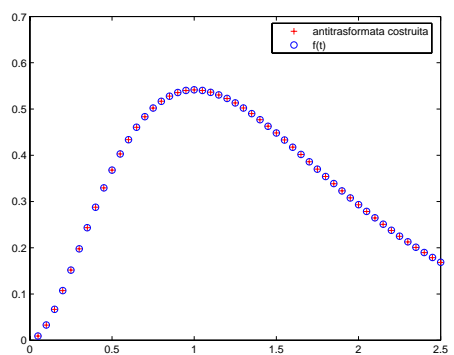


Figura 5.9: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} , $N = 10$**

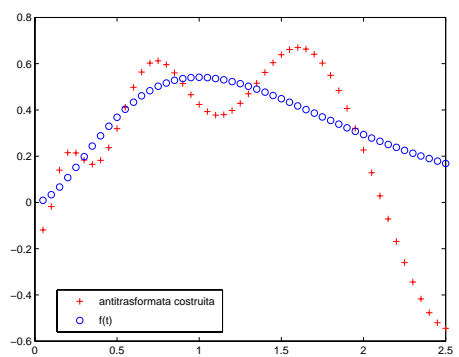


Figura 5.10: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} , $N = 18$**

5.2.3 Calcolo dell'antitrasformata di $F(s) = atan(1/s)$

Sia assegnato un insieme costituito da 127 campioni reali, del tipo

$$P_i = (x_i, F(x_i)), \quad i = 1, \dots, n$$

con le x_i distribuite in maniera *random*:

$$x_i \in [0.00027, 15], \quad i = 1, \dots, n$$

e le ordinate corrispondenti, $F(x_i)$, calcolate valutando la funzione trasformata di Laplace

$$32) F(s) = atan(1/s), \quad f(t) = \sin t/t$$

Anche per questo test ci soffermiamo solo sui risultati ottenuti applicando alla spline s_{Lt} il metodo di inversione di Rjabov.

In Tabella 5.3 si descrivono gli errori di fitting e gli errori relativi nelle ricostruzioni dell'antitrasformata, mediante spline s_{Lt} .

N	$E_{fitting}$	$relerr_{s_{Lt}}$
5	1.5340e-07	1.8388e-02
8	2.4878e-07	3.1569e-03
10	2.3547e-07	2.6264e-04
18	2.6079e-07	1.3592e-02

Tabella 5.3: **Errore relativo**

Anche per questa funzione, la scelta di $N = 10$ sembra garantire il giusto compromesso nel tentativo di mantenere bassi i due errori riportati in Tabella.

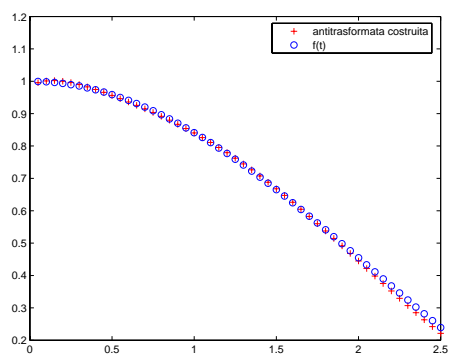


Figura 5.11: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} , $N = 5$**

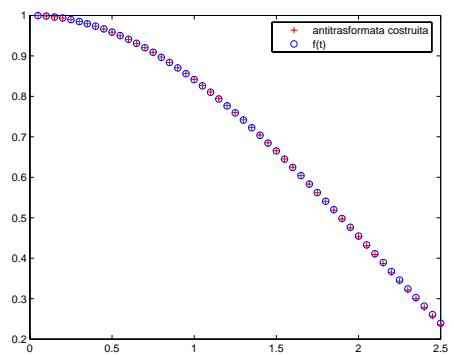


Figura 5.12: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} , $N = 8$**

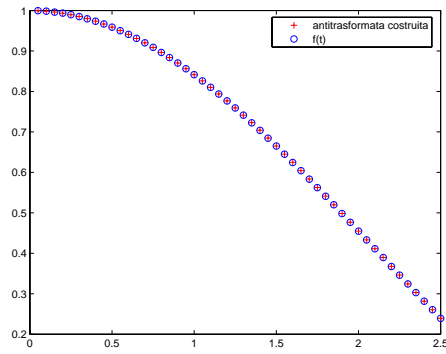


Figura 5.13: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} , $N = 10$**

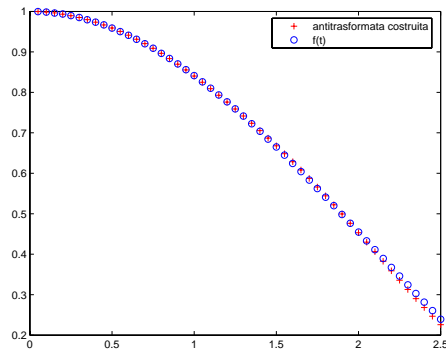


Figura 5.14: **Approssimazione dell'antitrasformata invertendo la spline s_{Lt} , $N = 18$**

Capitolo 6

Sul problema dell'inversione con dati discreti

6.1 Un esempio di applicazione: analisi di dati derivanti da spettroscopia NMR

In questo paragrafo si descrive un esempio di applicazione del metodo proposto ad un problema **inversione con dati discreti**; in esso i dati *reali* di cui si dispone sono il risultato di un'analisi di *spettroscopia NMR*.

♣ **Esempio 6.1.1.** Il problema¹ parte dallo studio della velocità di *rilassamento spin-lattice* ($R1$), per una distribuzione di nuclei di idrogeno presenti nell'acqua contenuta in campioni di suolo sintetico.

Il *tempo di rilassamento spin-lattice* consiste nel tempo di cessione di energia, da parte di nuclei eccitati, all'ambiente circostante. L'energia emessa viene, quindi, registrata come segnale in funzione del tempo di rilassamento; il risultato dell'esperimento NMR è dato dall'espressione del segnale, S , in funzione del tempo, t .

I valori $R1$ dipendono da quanto è forte il legame tra le molecole di acqua ed i sistemi molecolari costituenti il campione di suolo. Attraverso la tecnica di spettroscopia NMR (Nuclear Magnetic Resonance)² ed un esperimento di **inversion recovery**³, si ricava S in funzione di t , la cui forma funzionale è del tipo:

¹I dati relativi al problema descritto sono stati forniti da J. P. Hornak, Magnetic Resonance Laboratory, Rochester Institute of Technology, Rochester, NY 14623-5604 USA

²Il processo NMR consente di studiare il comportamento della materia rispetto ad un campo magnetico esterno ed alle onde elettromagnetiche RF (Radio Frequenze).

³Il processo di *inversion recovery* studia il problema di **determinare l'input del segnale, a partire dal segnale stesso**.

$$S(t) = \sum_{i=1}^n f_i \left(1 - 2e^{-R_{1_i} t}\right) \quad (6.1)$$

in cui la sommatoria è sulle diverse interazioni che possono sussistere tra le molecole di acqua e gli altri sistemi molecolari costituenti il campione di suolo. **Il problema consiste nel determinare f come funzione di $R1$.**

I dati dell'esperimento consistono in 127 valori di $t \in [0.00027, 15]$ misurati in secondi ed altrettanti valori normalizzati di S . Il grafico seguente mostra l'andamento dei dati di input (Figura 6.1).

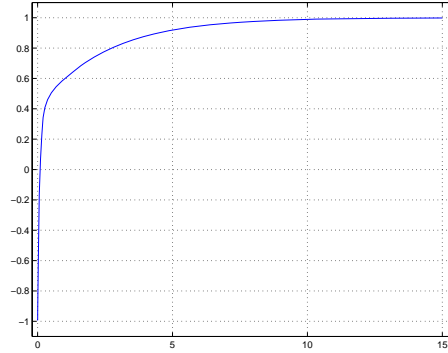


Figura 6.1: Curva che descrive il segnale in funzione del tempo come risultato dell'esperimento NMR

Si suppone, inoltre, che i dati sperimentali contengano rumore ($SNR > 10$)⁴ e che siano noti i seguenti valori di f :

- $R1 = 2.5 \Rightarrow f = 0.3$
- $R1 = 0.1 \Rightarrow f = 0.4$
- $R1 = 0.05 \Rightarrow f = 0.3$

♣

In due precedenti lavori [8]-[9], è stata costruita la **B-spline interpolante** i campioni, dopo aver applicato ad essi una opportuna trasformazione lineare affinché si potessero interpretare, in base al loro decadimento a zero all'infinito, come valori di una funzione trasformata di Laplace. Dunque, dopo aver valutato la B-spline in corrispondenza di un insieme di punti equi-

⁴SNR, *signal to noise ratio*, ovvero rapporto tra l'altezza media di un picco nello spettro del segnale e l'altezza della deviazione standard del rumore, alla base del grafico dello spettro.

distanti, ad essa sono stati applicati due metodi di inversione numerica della trasformata di Laplace nel caso reale, tra i quali il metodo di Rjabov.

♣ **Esempio 6.1.2.** Ritornando all'esempio 6.1.1, il principale problema da affrontare consiste nel conoscere l'effettiva dipendenza della f dai valori di $R1$. Sono possibili, in effetti, diverse assunzioni riguardanti la funzione incognita da determinare. Supponiamo, innanzitutto, che:

$$f_i = f(R1_i)$$

e chiamiamo per semplicità di notazioni $R1_i = r_i$.

Il modello matematico discreto che assumiamo è il seguente:

$$s(t) = \sum_{i=1}^n f(r_i) - 2 \sum_{i=1}^n f(r_i) e^{-tr_i}; \quad (6.2)$$

il problema da risolvere viene, dunque, così formulato:

Problema 6.1. *Assegnati 127 valori della variabile reale $t \in [0.0027, 15]$ e noti i corrispondenti valori di $s(t)$, si vuole determinare la funzione incognita $f(r)$.*

Il problema continuo, dalla cui discretizzazione (con un opportuno troncamento) si deduce il problema 6.2, risulta il seguente:

$$s(t) = \int_0^\infty f(r) dr - 2 \int_0^\infty f(r) e^{-tr} dr. \quad (6.3)$$

Definiamo, inoltre, [2]:

$$M_\infty = \int_0^\infty f(r) dr.$$

Si suppone che $f(r) \geq 0$ e che sia normalizzata, ovvero:

$$M_\infty = \int_0^\infty f(r) dr = 1;$$

osserviamo che:

$$s(0) = -M_\infty$$

e che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\int_0^\infty f(r) dr - 2 \int_0^\infty f(r) e^{-tr} dr \right] = M_\infty \neq 0$$

da ciò si osserva che, in base al suo andamento all'infinito, **la funzione s non può interpretarsi come trasformata di Laplace**, quindi non possiamo applicare ad essa ed ai dati di cui si dispone, un metodo di inversione numerica della trasformata di Laplace. A partire dalla (6.3), definiamo, allora, la funzione:

$$G(t) = \int_0^\infty f(r) e^{-tr} dr = \frac{M_\infty - s(t)}{2} \quad (6.4)$$

ed osserviamo che essa gode delle proprietà di una trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned}
G(0) &= \frac{M_\infty - s(0)}{2} = \frac{M_\infty + M_\infty}{2} = M_\infty \\
\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) &= \frac{M_\infty - s(\infty)}{2} = \frac{M_\infty - M_\infty}{2} = 0 \\
\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot G(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t \cdot M_\infty}{2} - \frac{t \cdot M_\infty}{2} \right) = 0 \\
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(t)}{t} &= \frac{M_\infty}{2t} - \frac{s(\infty)}{2t} = 0
\end{aligned}$$

Per cui abbiamo trasformato il problema 6.1 nel problema 6.2:

Problema 6.2. *Assegnati 127 valori della variabile reale $t \in [0.0027, 15]$ e noti i corrispondenti valori di $G(t)$, si vuole determinare la funzione incognita $f(r)$.*

L'andamento della funzione $G(t)$ è quello mostrato dalla Figura 6.2.

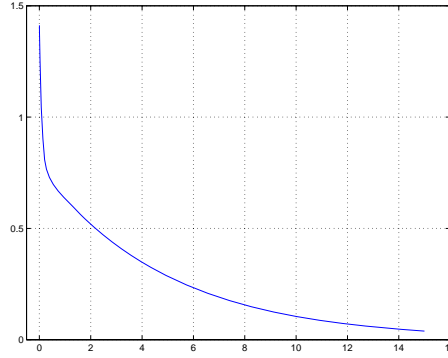


Figura 6.2: Curva che descrive il segnale trasformato

A partire dai valori noti della funzione $G(t)$ è stata costruita [8] una B-spline interpolante che approssimi la $G(t)$ e rappresenti la Trasformata di Laplace da invertire. È stata, allora, calcolata l'antitrasformata \tilde{f} , applicando due diversi metodi di inversione, il metodo di Rjabov (RM) ed un secondo metodo, che indicheremo come **metodo 2**, in cui l'antitrasformata è determinata attraverso uno sviluppo in termini di polinomi di Legendre [31]. I valori di \tilde{f} sono stati confrontati (Fig. 6.3-6.4) con i valori della f noti.



6.2 Test di inversione con dati discreti

Siano assegnati i campioni $(t, G(t))$, con $t \in [0.00027, 15]$ e G Trasformata di Laplace definita nell'esempio 6.1.2. Si vuole determinare l'antitrasformata incognita, applicando il procedimento descritto nel lavoro di tesi, cioè,

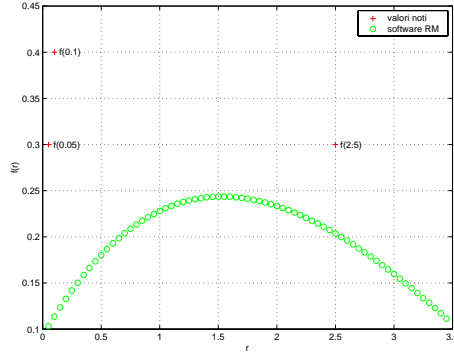


Figura 6.3: Confronto tra il metodo Rjabov ed i valori noti

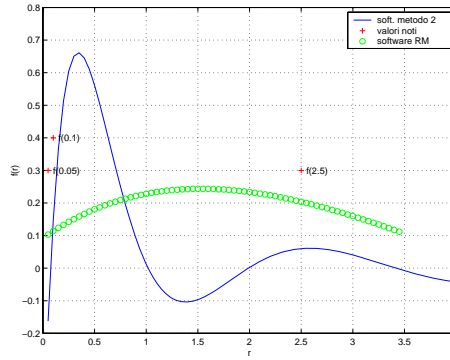


Figura 6.4: Confronto tra i due software

costruendo la spline generalizzata s_{Lt} interpolante i dati ed applicando il metodo di inversione di Rjabov.

In assenza di informazioni sull'espressione analitica della Trasformata da invertire, proviamo a studiare l'andamento dei coefficienti dello sviluppo in serie di polinomi di Laguerre dell'antitrasformata. In effetti, condizione necessaria affinché la soluzione calcolata converga verso l'antitrasformata della funzione che ha generato i campioni, è che gli N coefficienti dello sviluppo costituiscano una successione decrescente verso lo zero, per $N \rightarrow \infty$. In caso contrario, dall'andamento dei coefficienti si può solo intuire che la funzione calcolata potrebbe non fornire un'approssimazione accurata dell'antitrasformata cercata.

In Fig. 6.5-6.11 si descrivono i coefficienti dello sviluppo in serie, per

$$N = 3, 4, 5, 10.$$

In Fig. 6.6-6.12 le corrispondenti ricostruzioni dell'antitrasformata. Sugli stessi grafici sono riportati i tre valori noti della funzione da ricostruire. Si osserva che, solo per $N = 4$ i coefficienti dello sviluppo in serie di polinomi di Laguerre dell'antitrasformata decadono verso lo zero.

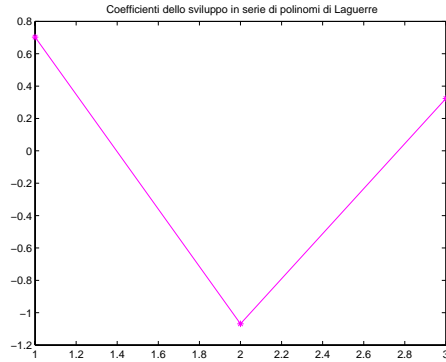


Figura 6.5: Coefficienti dello sviluppo in serie di polinomi di Laguerre, $N = 3$

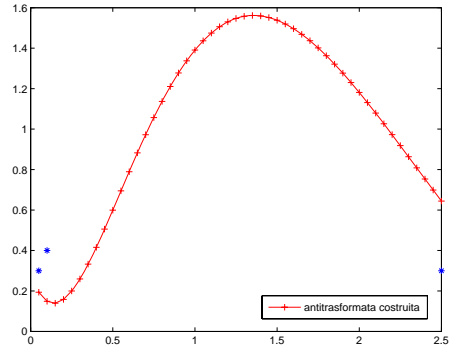


Figura 6.6: Antitrasformata costruita, $N = 3$

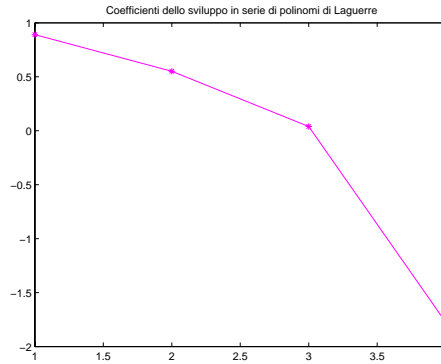


Figura 6.7: Coefficienti dello sviluppo in serie di polinomi di Laguerre, $N = 4$

Ricordiamo che, nei test di inversione, per $N = 10$ si riusciva ad ottenere un'approssimazione accurata dell'antitrasformata, con un errore di fitting

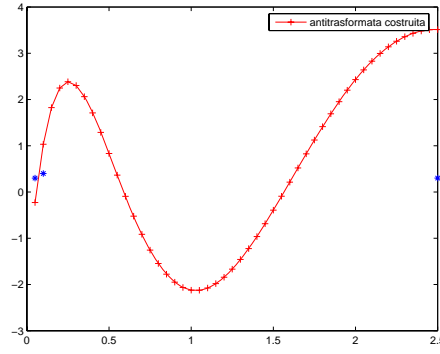


Figura 6.8: Antitrasformata costruita, $N = 4$

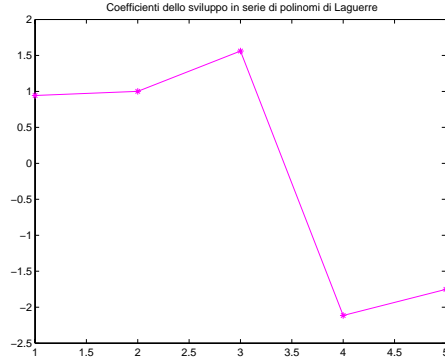


Figura 6.9: Coefficienti dello sviluppo in serie di polinomi di Laguerre, $N = 5$

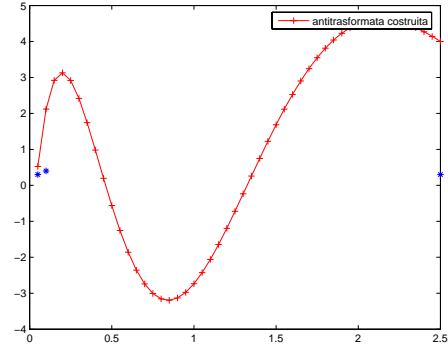


Figura 6.10: Antitrasformata costruita, $N = 5$

relativamente basso. In questi test, per $N = 10$, i coefficienti dello sviluppo in serie di polinomi di Laguerre dell'antitrasmformata, troncato al decimo termine, lasciano prevedere un andamento oscillante, al crescere di N (Fig. 6.11).

Purtroppo, come si evince dalle curve tracciate, i risultati prodotti dall'applicazione del metodo proposto sembrano lontani dalla soluzione attesa, almeno in relazione alle informazioni di cui si dispone, relative al passaggio per i valori noti. In effetti, poiché abbiamo perso l'unicità della soluzione, ovvero dell'antitrasmformata, il problema che stiamo affrontando non è più il **Problema 2.1**; il nuovo problema andrebbe affrontato attraverso un me-

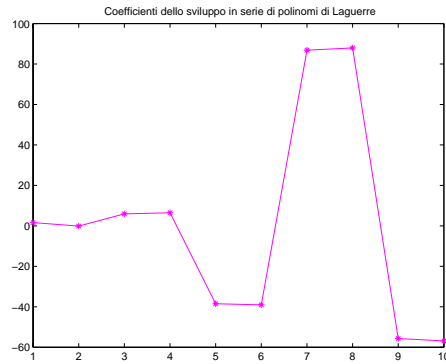


Figura 6.11: Coefficienti dello sviluppo in serie di polinomi di Laguerre, $N = 10$

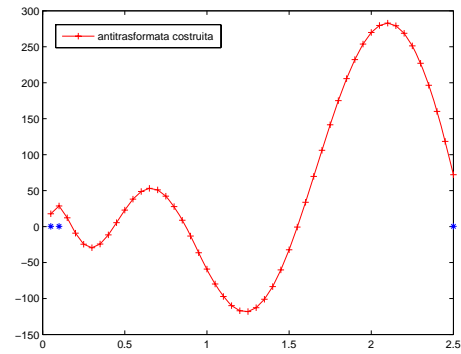


Figura 6.12: Antitrasformata costruita, $N = 10$

todo di inversione con dati discreti **con vincoli**, cioè strutturato in modo tale che, nota la Trasformata attraverso un numero finito di valori, il calcolo dell'antitrasformata sia condizionato da alcuni limiti imposti sulla funzione stessa; ad esempio si può richiedere che essa **soddisfi a condizioni di positività**

$$f(t) \geq 0$$

passaggio per punti noti o normalizzazione

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Capitolo 7

Conclusioni e sviluppi futuri

7.1 Considerazioni sui risultati raggiunti e prospettive future

Le esperienze descritte e le problematiche affrontate nel presente lavoro di tesi, hanno condotto ad una formulazione di un modello di fitting per la funzione Trasformata di Laplace che ha consentito, almeno per quanto riguarda i test sintetici nel caso reale, di risolvere il problema del *calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace, in presenza di dati discreti*. In effetti, verificata l'attendibilità del metodo attraverso le esperienze realizzate su dati sintetici, stimando la bontà delle approssimazioni prodotte per l'antitrasformata nota, la parte più delicata del lavoro consiste nella formulazione di un modello di fitting in cui siano presenti anche vincoli imposti sull'antitrasformata desiderata.

7.2 Alcuni problemi irrisolti e spunti risolutivi

Affinché il metodo proposto possa risolvere il problema con dati discreti nella sua completezza, è necessario approfondire alcuni problemi lasciati irrisolti. Ne citiamo solo alcuni, emersi nella trattazione del lavoro.

Innanzitutto, resta da completare la definizione del modello nel caso bidimensionale, così da affrontare il problema di inversione con dati discreti

anche nel caso complesso.

Tuttavia, anche nel caso reale restano alcuni approfondimenti da dover dedicare alla definizione stessa del modello. In effetti, la spline generalizzata è stata definita in $[x_1, +\infty)$, cioè tra i nodi di costruzione ed all'infinito. È necessario, dunque, raffinare la definizione e costruzione del modello, in modo tale che esso possa fornire un'approssimazione accurata della Trasformata di Laplace anche nell'intervallo $(-\infty, x_1]$ o, meglio, in $(\alpha_f, x_1]$, con α_f ascissa di convergenza della Trasformata.

Sempre sulla definizione del modello di spline generalizzata, un ulteriore punto da sviluppare è la possibilità di stabilire l'ordine di infinitesimo della spline generalizzata in base all'analisi della distribuzione dei campioni di cui si dispone, e del loro rapporto di decadimento a zero.

Appendice A

Sull'interpolazione bidimensionale

A.1 Spline prodotto tensoriale

È noto [14] che, se $U = \Pi_h$ è lo spazio dei polinomi di grado al più h , definiti in $X = \mathbb{R}$ e $V = \Pi_k$, lo spazio dei polinomi di grado al più k , definiti in $Y = \mathbb{R}$, allora lo spazio prodotto tensoriale di U e V , $U \otimes V$ è lo spazio lineare $\Pi_{h,k}$, costituito dai polinomi in due variabili, di grado al più h nella prima variabile ed al più k nella seconda variabile, considerati come funzioni definite nel piano $X \times Y = \mathbb{R}^2$ [14]. Analogamente, sia $U = S_{h,\mathbf{s}}$ lo spazio delle spline di ordine h (grado $< h$) sull'insieme di nodi $\mathbf{s} = (s_i)_1^{m+h}$, con $s_i < s_{i+h}$, $\forall i$ e $V = S_{k,\mathbf{t}}$ lo spazio delle spline di ordine k sull'insieme di nodi $\mathbf{t} = (t_i)_1^{n+k}$, con $t_i < t_{i+k}$, $\forall i$. Si definisce la spline prodotto tensoriale $s_{pt} \in U \otimes V$ come

$$s_{pt} = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} B_{i,j}$$

per una opportuna matrice di coefficienti $(\alpha_{i,j})$ e per

$$B_{i,j}(x, y) := B_{i,h,\mathbf{s}}(x) B_{j,k,\mathbf{t}}(y)$$

prodotto di funzioni di base, $B_{i,h,\mathbf{s}}$ e $B_{j,k,\mathbf{t}}$.

In generale, una superficie rettangolare interpolante, ottenuta come prodotto

tensoriale, si può definire come

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{i,j} A_i(u) B_j(v)$$

con le funzioni A_i e B_j polinomi di Bernstein o basi di B-splines ¹. L'equazione può, dunque essere scritta in forma matriciale come:

$$\mathbf{x}(u, v) = [A_0(u) \dots A_m(u)] \begin{bmatrix} c_{0,0} & \dots & c_{0,n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m,0} & \dots & c_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0(v) \\ \vdots \\ B_n(v) \end{bmatrix}$$

A.2 Sulla rappresentazione globale

A.2.1 *Blending surfaces*

Si supponga di disporre di due superfici, rappresentazione *locale* in sottoregioni dello spazio \mathbb{R}^2 , di una funzione in due variabili. Supponiamo di voler generare la superficie *globale* che rappresenti la funzione in tutto \mathbb{R}^2 . A tal fine possiamo *raccordare, in modo regolare*, le due superfici attraverso una ulteriore superficie individuata dalle loro curve di frontiera. Quest'ultima sarà detta *superficie di blending* [18]. Dal punto di vista analitico essa è esprimibile come combinazione lineare (con opportuni pesi) delle funzioni rappresentate dalle superfici da connettere. Dal punto di vista geometrico, quando si raccordano più superfici si può stabilire l'ordine di **continuità geometrica** da imporre lungo la curva di raccordo. Richiamiamo, a tal proposito, la nozione di **continuità geometrica** per superfici algebriche [40] come misura della regolarità della superficie generata dall'unione di due. La richiesta che la superficie *globale* sia C^1 si può, in qualche modo, *rilassare attraverso la richiesta di continuità geometrica* (G^1), di cui si riporta la definizione secondo Farin [17]:

Definizione A.1. [Continuità geometrica] *Due superfici (patches) caratterizzate da un contorno costituito da una curva comune, sono dette G^1*

¹In realtà le funzioni A_i e B_j possono appartenere anche a spazi di funzioni distinti; ad esempio potrebbero essere B-splines in u e polinomi di Lagrange in v .

se dotate di un piano tangente, che varia con continuità lungo la curva che costituisce il contorno.

Il concetto di continuità G^1 è una generalizzazione della continuità C^1 , nel senso che tutte le superfici (non degeneri) C^1 sono G^1 ma non è vero il viceversa. Dalla definizione segue, allora, che la continuità geometrica in un particolare punto di una superficie corrisponde all'esistenza di un unico piano tangente alla superficie in quel punto; superfici che si intersecano lungo una curva con piano tangente continuo, godono di *continuità geometrica di ordine uno* (continuità G^1); infine, superfici che si incontrano con curvatura continua godono di *continuità geometrica di ordine due* (continuità G^2). È stato, dunque, utilizzato il termine *superficie di blend* in riferimento alla superficie di transizione *regolare*, tra le superfici determinate mediante due distinti modelli approssimanti.

Un esempio di **superfici di blending parametriche** è costituito dalle **patches di Coons**.

A.2.2 Patches di Coons

Le **patches di Coons** sono utilizzate per mettere in relazione superfici. Esse differiscono dai metodi che si basano su curve e superfici di Bézier o B-splines in quanto, piuttosto che essere descritte da reti di punti di controllo esse generano superfici "riempiendo", opportunamente, le reti costituite da curve.

In generale, assegnate quattro curve, diciamo $c_1(u)$ e $c_2(u)$ definite su $u \in [0, 1]$ e $d_1(v)$ e $d_2(v)$, definite su $v \in [0, 1]$, possiamo determinare una superficie che abbia queste 4 curve come contorno:

$$\begin{aligned} x(u, 0) &= c_1(u), & x(u, 1) &= c_2(u), \\ x(0, v) &= d_1(v), & x(1, v) &= d_2(v) \end{aligned}$$

Attraverso le quattro curve al contorno si costruisce la *superficie interpolante* i quattro vertici:

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0,0} & x_{0,1} \\ x_{1,0} & x_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

Appendice B

Approfondimenti sulle spline biarmoniche

In generale, le spline cubiche sono utilizzate per determinare le curve (o le superfici) più regolari che interpolino insiemi di punti (non uniformemente distribuiti). Le curve (o superfici) interpolanti soddisfano l'equazione biarmonica

$$\nabla^4 \Phi = 0$$

e, dunque, hanno curvatura minima.

Descriviamo il problema di **interpolazione mediante spline biarmonica**.

Interpretazione fisica del modello

Se si pensa al listello di legno flessibile (spline) costretto a passare per un insieme di punti mediante l'applicazione di opportuni pesi, risulta naturale cercare l'espressione delle forze che i pesi esercitano sulla spline per mantenerla piegata. Per piccoli spostamenti la spline ha quattro derivate nulle tranne in corrispondenza dei pesi. Pensiamo, dunque, ad una *forza unitaria localizzata in un punto* come ad una forza distribuita su un ε -intervallo intorno del punto. La densità di questa forza distribuita è inversamente proporzionale a ε . Più precisamente si definisce

$$\delta_\varepsilon(x - \xi) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & |x - \xi| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & |x - \xi| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

l'approssimazione finita della distribuzione di Dirac, il cui integrale, che rappresenta la forza totale è unitario:

$$\int_a^b \delta_\varepsilon(x - \xi) dx = \int_{\xi - \varepsilon/2}^{\xi + \varepsilon/2} \delta_\varepsilon(x - \xi) dx = 1$$

Analogamente, se si applica una tale *densità di forza*^a $F(x) = \delta_\varepsilon(x - \xi)$, ad una corda sottoposta a tensione orizzontale costante, T , la reazione della corda alla forza applicata è governata dalla equazione di Poisson^b cioè

$$T \frac{d^2 G}{dx^2} = -\delta_\varepsilon(x - \xi)$$

La forza applicata alla corda risulta concentrata in un intervallo di misura ε . Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, **la reazione della corda tende alla funzione di Green** $G(x; \xi)$.

^aLa *densità di forza* applicata ad un punto di una corda è data dal rapporto della forza applicata sulla lunghezza della corda.

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -f(x) \quad \text{dove} \quad f(x) = \frac{F(x)}{T}$$

Si definisce **funzione di Green per il problema ai valori al contorno non omogeneo**:

$$\begin{cases} Lu(x) &= -f(x) & a < x < b \\ B_1(u) &= 0 \\ B_2(u) &= 0 \end{cases}$$

una funzione con la proprietà

$$\begin{cases} LG(x; \xi) &= -\delta(x - \xi) & a < x, \xi < b \\ B_1(G) &= 0 \\ B_2(G) &= 0 \end{cases}$$

con L operatore differenziale lineare del secondo ordine.

La funzione di Green per lo strumento spline,

$$\phi = |x|^3$$

come reazione ad una forza applicata ad un punto (*point force Green function*), soddisfa l'equazione biarmonica:

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} = 6\delta(x)$$

Quando questa funzione di Green è usata per interpolare n punti (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, il problema diventa

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \sum_{j=1}^n 6a_j \delta(x - x_j) \quad (\text{B.1})$$

$$y(x_i) = y_i \quad (\text{B.2})$$

La soluzione è una particolare combinazione di *point force Green functions* centrate in ciascuno dei punti dati:

$$y(x) = \sum_{j=1}^n a_j |x - x_j|^3 \quad (\text{B.3})$$

Le forze applicate in ciascun punto, individuate dai coefficienti a_j , si determinano risolvendo il sistema

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_j |x_i - x_j|^3$$

o, in forma matriciale, $\mathbf{G} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{y}$, con \mathbf{G} matrice di Green o kernel dei dati. Determinati i coefficienti a_j , la funzione biarmonica $y(x)$ può essere valutata in un qualsiasi altro punto attraverso l'equazione (B.3).

In m dimensioni la tecnica si generalizza ed il problema (B.1-B.2) diventa:

$$\nabla^4 w = \sum_{j=1}^n a_j \delta(x - x_j) \quad (\text{B.4})$$

$$w(x_i) = w_i \quad (\text{B.5})$$

dove ∇^4 è l'operatore biarmonico e x è un vettore posizione nello spazio ad m dimensioni. La soluzione è, allora,

$$w(x) = \sum_{j=1}^n a_j \phi_m(x - x_j) \quad (\text{B.6})$$

con ϕ_m funzione biarmonica di Green di dimensione m . In particolare per

$$\begin{aligned} m = 1 & \quad \phi_1(x) = |x|^3 \\ m = 2 & \quad \phi_2(x) = |x|^2 (\ln|x| - 1) \end{aligned}$$

I coefficienti a_j sono ancora determinati risolvendo il sistema lineare

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_j \phi_m(x_i - x_j)$$

In una e due dimensioni è stato, inoltre provato che una funzione ha curvatura minima¹ se, e solo se, soddisfa l'equazione biarmonica.

¹La curvatura totale quadrata è

$$C(w) = \int_S (\nabla^2 w)^2 dS$$

dove ∇^2 è l'operatore Laplaciano e S è la superficie cui appartiene w .

Bibliografia

- [1] J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh *The Theory of Splines and Their Applications* Academic Press Inc., 1967
- [2] P. Barone, A. Ramponi and G. Sebastiani *On the numerical inversion of the Laplace transform for nuclear magnetic resonance relaxometry*, Inverse Problems 17 (2001) 77-94. Printed in the UK
- [3] R. E. Bellman, R. E. Kalaba e J. A. Lockett *Numerical inversion of the Laplace transform*, Amer. Elsevier Publ. Co. Inc., New York, 1966
- [4] M. Bertero, P. Brianzi and E.R. Pike *On the recovery and resolution of exponential relaxation rates from experimental data: Laplace transform inversion in weighted spaces*, Inverse Problems 1 (1985) 1-15. Printed in Great Britain
- [5] M. Bertero, C. De Mol and E.R. Pike *Linear inverse problems with discrete data. I: General formulation and singular system analysis*, Inverse Problems 1 (1985) 301-330. Printed in Great Britain
- [6] M. Bertero, C. De Mol and E.R. Pike *Linear inverse problems with discrete data. II: Stability and regularisation*, Inverse Problems 4 (1988) 573-594. Printed in the UK
- [7] M. Bertero and E.R. Pike *Exponential-sampling method for Laplace and other dilationally invariant transforms: I. Singular-system analysis*, Inverse Problems 7 (1991) 1-20. Printed in the UK
- [8] R. Campagna, S. Cuomo, L. D'Amore, A. Murli - *Problematiche relative all'applicazione della trasformata di Laplace nello studio dei rapporti di rilassamento spin-lattice*, Tech. Rep. n. TR-03-11, settembre 2003

- [9] R. Campagna - *Problematiche relative all'applicazione della trasformata di Laplace nello studio dei rapporti di rilassamento spin-lattice: considerazioni relative all'andamento dell'errore, al crescere del numero dei nodi di costruzione*, Tech. Rep. n. TR-03-13, novembre 2003
- [10] J. C. Carr, R. K. Beatson, J. B. Cherrie, T. J. Mitchell, W. R. Fright, B. C. McCallum, T. R. Evans *Reconstruction and Representation of 3D Objects with Radial Basis Functions*, Proceedings of SIGGRAPH 2001, ACM Press/ACM SIGGRAPH, E. Fiume, Ed., 67-76
- [11] S. Cuomo, L. D'Amore, A. Murli and M. Rizzardi - *Computation of the inverse Laplace transform based on a collocation method which uses only real values*, Journal of Computational and Applied Mathematics, febbraio 2006
- [12] S. Cuomo, L. D'Amore, A. Murli - *Error analysis of a Collocation method for numerically inverting a Laplace transform in case of real samples*, Journal of Computational and Applied Mathematics, marzo 2006
- [13] A. D'Alessio, G. Giunta, G. Schmid - *Sul posizionamento del problema di inversione della trasformazione di Laplace*, Ricerche di Matematica, Vol. XLIII, fasc. 1^o, (1994), 163-174
- [14] C. de Boor *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag New York Inc., 1978
- [15] G. Doetsch *Guide to the applications of Laplace Transforms*, D. Van Nostrand Company Ltd. London, 1961
- [16] G. Doetsch *Laplace transformation*, Dover, 1943
- [17] G. Farin *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A practical Guide*, II ed., Academic Press, inc..
- [18] D. J. Filip *Blending Parametric Surfaces*, ACM Transactions on Graphics, Vol. 8, No. 3, July 1989, Pages 164-173
- [19] B. S. Garbow, G. Giunta, J. N. Lyness, A. Murli, *Software for an Implementation of Weeks' Method for the Inverse Laplace Transform Problem*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol.14, No.2, June 1988, Pages 163-170

- [20] Gene H. Golub and Charles F. van Loan *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, 1996
- [21] T. N. E. Greville *Introduction to Spline Functions*, Publication No. 22 of the Mathematics Research Center, United States Army, The University of Wisconsin
- [22] P. C. Hansen *Rank-Deficient and Discrete Ill-posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*, SIAM, 1998
- [23] P. Henrici *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol.1, John Wiley & Sons, Inc., 1974
- [24] P. Henrici *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol.2, John Wiley & Sons, Inc., 1977
- [25] M. Iqbal *On spline regularized inversion of noisy Laplace transforms*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 83 (1997) 39-54
- [26] K. Kirk *Spatial sampling and interpolation methods - comparative experiments using simulated data*, September 26, 2003
- [27] G. Meinardus *Introductory Lectures on some problems in approximation theory*, manoscritto, 1974
- [28] Max K. Miller and W. T. Guy, Jr *Numerical Inversion of the Laplace Transform by use of Jacobi polynomials*, SIAM J. Numer. Anal. vol.3, No.4, 1966, Printed in U.S.A.
- [29] A. Murli *Matematica Numerica: metodi, algoritmi e software - Parte I*, in corso di stampa, Ed. Liguori
- [30] A. Murli, M. Rizzardi *Algorithm 682, Talbot's Method for the Laplace Inversion Problem*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol.16, No.2, June 1990, Pages 158-168
- [31] A. Papoulis *A new method of inversion of the Laplace Transform*, part of a paper presented at the Symposium on Modern Network Synthesis, Polytechnic Institute of Brooklyn, April 1955
- [32] T. J. Rivlin *Chebyshev polynomials. From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, II ed., John Wiley & Sons, Inc., 1990

- [33] M. Rizzardi *Sperimentare la Matematica con MATLAB: elementi di analisi complessa*, Liguori, 2005
- [34] Alyn P. Rockwood *The displacement method for implicit blending surfaces in solid models*, ACM Transactions on Graphics, Vol.8, No.4, October 1989, Pages 279-297
- [35] David T. Sandwell *Biharmonic Spline Interpolation of GEOS-3 and SEASAT Altimeter Data*, Geophysical Research Letters, 14, 2, 139-142, 1987
- [36] J. L. Schiff *The Laplace Transform - Theory and Applications*, Springer, 1999
- [37] I. J. Schoenberg *Remarks Concerning a Numerical Inversion of the Laplace Transform Due to Bellman, Kalaba and Lockett*, Journal of Mathematical analysis and applications 43, 823-828 (1973)
- [38] Larry L. Schumaker *Spline Functions: Basic Theory*, John Wiley & Sons, Inc., 1981
- [39] R. Sibson & G. Stone *Computation of thin-plate splines* SIAM J. Sci. Statist. Comput., vol. 12, pp 1304-1313, 1991
- [40] J. Warren *Blending Algebraic Surfaces* ACM Transactions on Graphics, Vol.8, No.4, October 1989, Pages 263-278
- [41] <http://www.mathworks.com/>